Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Građevinski fakultet Univerziteta u Sarajevu

Obrada nehomogenih mjerenja

Džanina Omićević

Sarajevo, septembar 2018

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Obrada nehomogenih mjerenja

Nonhomogeneous measurements processing

Monograph with numerical examples in the real and simulated surveying networks

Džanina Omićević

Sarajevo, 2018

This publication has been produced with financial support from the Erasmus+ Programme of the European Union, under the GEOWEB project: 561902-EPP-1-2015-1-SE-EPPKA2-CBHE-JP *Modernising geodesy education in Western Balkan with focus on competences and learning outcomes (GEOWEB)*

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Smrtnom kaznom kažnjavani su oni koji bi zaboravili ili zanemarili svoju dužnost umjeravanja etalonske jedinice dužine svakoga punog mjeseca. Takva je pogibelj prijetila graditeljima na kraljevskom gradilištu odgovornim za gradnju faraonskih hramova i piramida u davnošnjem Egiptu, 3000 godina prije Krista. Prvi kraljevski lakat bio je definisan kao dužina podlaktice od lakta do vrha ispruženog srednjeg prsta vladajućeg faraona uvećana za širinu njegove šake. Ta se izvorna mjera prenosila u crni granit i urezivala u njemu. Radnici na gradilištima dobivali su primjerke u granitu ili drvetu, a graditelji su bili odgovorni za njihovo čuvanje.

Od toga vremena ljudi su bez obzira na mjesto i vrijeme pridavali veliki značaj ispravnosti mjerenja. U novije doba, 1799. godine u Parizu stvoren je desetični metrički sistem pohranjivanjem dvaju platinastih etalona koji su predstavljali metar i kilogram – početak današnjeg Međunarodnog sistema jedinica (SI).

U današnje vrijeme geodetski stručnjak veliki dio vremena provodi na terenu izvodeći mjerenja različitim kombiniranim mjernim tehnikama. Pri tome vektor mjerenja je veoma često heterogene prirode, jer sadrži raličite tipove mjerenja.

Obrada mjerenih podataka u geodetskim aplikacijama najčešće koristi metodu najmanjih kvadrata, za koju je potrebno pravilno odrediti stohastički model pri obradi mjerenih veličina. Stohastički model opisuje tačnost mjerenih veličina i njihovu međusobnu povezanost. Kovarijanc matrica općenito nije poznata. Njen izgled je stoga potrebno a priori procijeniti.

Kod heterogenih vektora mjerenja jedan te isti varijanc faktor vrijedi za sve grupe opažanja koje su uključene u izravnanje, a njegovo određivanje je prilično komlicirano, jer zahtijeva poznavanje unutrašnje statističke strukturne veze između pojedinih grupa mjerenja.

Izlaz iz ove kompleksne situacije nude metode, koje omogućuju da se, istovremeno s procjenom traženih veličina procjenjuju a posteriori procjene težine mjerenih veličina. Najčešći način rješavanja problema je da se formiraju grupe opažanja u kojima su poznati međusobni odnosi tačnosti, pa se svakoj toj grupi mjerenja dodijeli specifičan odgovarajući varijanc faktor. A posteriori ocjena varijanc faktora pojedinačnih grupa potom određuje nove težine grupa, koje se usvajaju kao osnova za ponovni korak u iterativnom postupku izravnanja.

Dakle, cilj ovog teksta je upoznavanje i razumijevanje pojma mjerenja, osnovnih karakteristika mjerenja, te obrade geodetskih mjerenja.

Ova monografija u prvem redu je napisana da posluži studentima diplomskog studija za lakše savladavanje i razumjevanje gradiva i postizanje ishoda učenja na svim predmetima koji se bave precinim mjerenjima, te obradom i analizom geodetskih mjerenja.

Ova monografija je koncipirana da sadrži šest poglavlja, pet poglavlja teoretski obrađuju problem, a u šestom su dati riješeni praktični primjeri.

Prvo poglavlje daje definicuju i pojam mjerenja. u ovom poglavlju je predstavljen osnovni koncept, model obrade geodetskih mjerenja koji se sastoji iz funkcionalnog i stohastičkog modela.

Drugo poglavlje obrađuje opću teoriju mjerenja. Materijal za pisanje ovog poglavlja uvelikoj mjeri se oslanja na knjigu Adjustment computations – statistics and least squares in surveying and GIS, Paul R. Wolfa Charles D. Ghilanija koje se koristi na univerzitetima Berkeley Wisconsin-Medison, oba u SAD. Također, korišten je i materijal Račun izravnanja I – Analiza rezultat geodetskih mjerenja i Obrada i analiza podataka geodetskih mjerenja koji se koristi na Univerzitetu u Beogradu na Građevinskom fakultetu – Odsjeku za geodziju i geoinformatiku.

Poglavlje 3 započinje s kratkim prikazom Gauss - Markovog parametarskog modela procjenjivanja. Na početku su uvedeni osnovni simboli i relacije da bi se kasnije jednostavno pozivalo na njih. Korištenje matematičkih simbola je konzistentno unutar cjelokupnog rada. Za lakše čitanje, dat je spisak korištenih simbola.

U *poglavlju četiri* su prezentirane jednačine popravaka vektora mjerenja. Vektor mjerenja kod prostornih geodetskih mreža je obično heterogene prirode, tj. može sadržavati razne tipove mjerenja, izvedene kombiniranim tehnikama geodetskih mjerenja i opažanja. Klasična terenska opažanja uključuju terestrička: udaljenosti (horizontalne i prostorne), horizontalne uglove, horizontalne pravce, zenitne udaljenosti, visinske razlike i koordinatne razlike. Pored terestričkih mjerenja, testirane mreže uključuju i udaljenosti određene metodama satelitskog pozicioniranja.

Jednačine popravaka su dakle heterogene prirode, a mjerenja su naravno različite tačnosti. Nameće se logično pitanje kako vrednovati tačnost s kojom je mjerenje izvršeno, da bi kvaliteta mjerenja na najbolji način bila predstavljena u izravnanju. U četvrtom poglavlju dat je pregled računanja a priori standardnog odstupanja mjerenja.

Peto poglavlje daje pregled metoda procjene komponenti varijance, odnosno pregled metoda za a posteriori procjenu standardnog odstupanja mjerenja. Postoje različite klasifikacije a posteriori metoda procjene. U ovom radu svrstane su prema:

funkcionalnom modelu, stohastičkom modelu, proceduri procjene i proceduri pojednostavljenja.

U poglavlju šest prezentirani su riješeni praktični primjeri obrade geodetskih mjerenja na pet geodetskih mreža. Prilikom obrade geodetskih mjerenja korišten je parametarski Gauss – Markov model izjednačenja s metodama a posteriori procjene.

Sarajevo, avgust 2018. Džanina Omićević

Spisak skraćenica

AUE – Almost Unbiased Estimation - skoro nepristrana procjena

BIQUE – Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation - najbolja invarijantna kvadratna nepristrana procjena

BIMP – Bureau Internatiomal des Poids et Mesures (International Bureau of Weights and Measures) – Internacinalni biro za utege i mjere

BLUE – Best Linear Unbiased Estimation – najbolja linearna nepristrana procjena

BQMBNE – Best Quadratic Minimum Bias Non-negative Estimator – najbolja minimalna kvadratna pristrana ne-negativna procjena

BQUNE – Best Quadratic Unbiased Non-negative Estimation - najbolja kvadratna nepristrana ne-negativna procjena

EOD - elekrooptički daljinomjer

GLONASS - Global Navigation Satellite System – globalni navigacioni satelitski sistem

GNSS - Global Navigation Satellite System – globalni navigacioni satelitski sistem

GPS - Global Positioning System – globalni pozicioni sistem

ISO - International Organization for Standardization – Međunarodna organizacija za standardizacija

MATLAB – MATrix LABoratory – matrični laboratorij

MINQUE – Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation – nepristrana procjena sa minimalnom kvadratnom normom

MLE – Maximum Likelihood Estimation - procjena maksimalne vjerovatnoće

REML - Restricted Maximum Likelihood Estimation – ograničena procjena maksimalne vjerovatnoće

SI -International System of Units – Međunarodni sistem jedinica

VCE – Variance Component Estimation – procjena komponenti varijance

Lista simbola

Opšta konvencija

$(.)^{\mathrm{T}}$ - transponovanje vektora ili matrice

$\propto$ - proporcionalno sa

$(.)^{-1}$ – inverzija matrice

$(.)^{+}$- pseudoinverzija matrice

Operatori

$\mathrm{D}(\cdot)$ - disperzija

$\mathrm{E}(\cdot)$- matematičko očekivanje

$\mathrm{vh}\{\cdot\}$ - operator

$\mathrm{vec}\{\cdot\}$ - operator

$\mathrm{tr}\{\cdot\}$ - trag

Specifični simboli

X - mjerena veličina

E- jedinica mjere

$\hat{\sigma}_0^2$- procjena varijanc faktora

$\mathbf{C}_{\hat{l}\hat{l}}$- kovarijanc matrica procijenjenog vektora opažanja

$\mathbf{C}_{l}$ - varijanc kovarijanc matrica opažanja

$\mathbf{C}_{vv}$ - kovarijanc matrica procijenjenog vektora popravaka

$\hat{\mathbf{L}}$ - procijenjeni vektor opažanja

$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ - matrica kofaktora procijenjenih parametara

$\mathbf{Q}_{l}$ - kofaktor matrica opažanja

$\mathbf{X}_0$ - vektor približnih vrijednosti parametara

$\hat{\mathbf{x}}$ - procijenjeni vektor nepoznatih parametara

σ_0^2-varijanc faktor (varijanca jedinice težine)

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ - a posteriori procijenjene komponente varijance

$\boldsymbol{\theta}_0$ - a priori komponente varijance

m - broj grupa mjerenja

n - broj mjerenja

r - broj stupnjeva slobode (prekobrojnost)

u - broj nepoznatih parametara

$\mathbf{A}$ - prvadizajn matrica

$\mathbf{B}$ - druga dizajn matrica

$\mathbf{L}$ - vektor opažanja

$\mathbf{P}$ - matrica težina

$\mathbf{Q}$ - kofaktor matrica

$\mathbf{I}$ - jedinična matrica

$\mathbf{l}$ - vektorskraćenih opažanja

$\mathbf{v}$ - procijenjeni vektor popravaka

$\mathbf{x}$ - vektor skraćenih parametara

$\mathbf{H}$ - Helmert - ova matrica za procjenu

δ - uvjet konvergencije

$\boldsymbol{\omega}$ - matrica grešaka definisana specifičnim uslovima

$\boldsymbol{\epsilon}$ - vektor grešaka

δ - odstupanja od aritmetičke sredine

f - greška zatvaranja trougla

N - broj trouglova

n_i – broj mjerenja u i-toj grupi

r_i – doprinos prekobrojnost

1 Uvod

Za rješavanje velikog broja veoma složenih zadataka koji se danas nameću geodetskoj struci, neophodno je uz što kraće vrijeme i ulaganje postići što veću tačnost, koristeći različite kombinovane tehnike mjerenja. Vektor mjerenja veoma često je heterogene prirode, sadrži razne tipove mjerenja. Klasična terestrička geodetska mjerenja uključuje mjerenje horizontalnih pravaca, horizontalnih uglova, dužina, visinskih razlika i zenitnih udaljenosti. Uz ove standardne opažane veličine, danas moramo dodati i mjerenja udaljenosti između tačaka pomoću satelitskih metoda. Razvojem globalnih navigacijskih satelitskih sistema (GNSS), kao što su: američki globalni pozicioni sistem (GPS), ruski globalni navigacijski satelitski sistem (GLONASS), evropski Galileo te kineski BeiDou, omogućeno je geodetima da razviju novu tehniku pozicioniranja. Tako je GNSS tehnika postala standardna metoda određivanja položaja u 21. vijeku.

Veći dio vremena geodetski stručnjak provede u terenskim radovima, pri tome rješavajući brojne i tehnički veoma složene mjerne zadatke. Pri tome treba slijediti osnovno pravilo da svaki zadatak treba rješavati primjenom odgovarajućih metoda i instrumenata.

Na izgled jednostavno, u praktičnoj izvedbi ovo pravilo je veoma složeno zbog stvarnih mogućnosti izvođenja, tradicije i navika, posebno u uslovima veoma brzog razvoja tehnologije i mjerne tehnike, u vrijeme kada se novi instrumenti sa novim mogućnostima svakodnevno pojavljuju.

Zadatak geodetskog stručnjaka je da projektuje – napravi plan rada, utvrdi tip, obim i postupak mjerenja i izvrši analizu mjerenja u skladu sa zahtjevima tačnosti. Od posebnog značaja je uvođenje novog u primjeni mjerne tehnike, ali s određenom mjerom, racionalnošću i ekonomičnošću.

1.1 Pojam mjerenja

Svrha mjerenja je određivanje vrijednosti mjerene veličine, što znači vrijednost posebne fizikalne veličine podvrgnute mjerenju. Izračunata vrijednost u obliku mjernog rezultata pri stručno i savjesno obavljenom mjernom postupku odgovarajućim mjernim instrumentom i priborom trebala bi se približiti istinitoj vrijednosti sa zahtijevanom tačnošću.

Model je teoretska apstrakcija na kojoj su zasnovana mjerenje.

Prema važećim metrološkim propisima (Guide to the expression of uncertainty in measurements, ISO 1997)[1] (BIMP & JCGM, 2008) mjerenje se definiše kao skup operacija izvedenih sa ciljem da se odredi vrijednost mjerene veličine. Mjerenje počiva na:

- specificiranju mjerene veličine
- metodi mjerenja
- proceduri mjerenja

Svako mjerenje počinje opisom mjerne veličine, mjerne metode i postupka, prethodnom analizom utjecajnih veličina i izborom mjernog instrumenta i pribora.

Kod savremenih mjerenja zahtijeva se o izvršenim mjerenjima i rezultatu pouzdana mjeriteljska informacija koja će korisnicima dati jasne iskaze o rezultatu i njegovoj nesigurnosti, a mora biti utemeljena na dovoljnom broju podataka o izabranom matematičkom modelu i primijenjenoj matematičko – statističkoj analizi.

U vrijeme globalnog razvoja i svjetskog tržišta, neophodno je, da u mjeriteljstvu u cijelom svijetu bude jednake metode računanja i izražavanja mjerne nesigurnosti, kako bi rezultati mjerenja, izvedeni bilo gdje u svijetu mogli uspoređivati, slično kao što je uvedeno korištenje međunarodnog sistema jedinica SI (Benčić & Solarić, 2008).

Jednostavno rečeno, mjerenja iste veličine istom preciznošću, bez obzira na mjeriteljsku ekipu i opremu, ili mjesto mjerenja, treba dati iste mjeriteljske informacije.

U praksi se često izrazi mjerenje i opažanje prepliću, pa se stiče utisak da između njih nema nikakve razlike.

[1] Upustvo za izražavanje mjerne nesigurnosti, ISO 1997

Izraz opažanje je da ukaže na operaciju i proces kao i ishod same operacije. Sa aspekta obrade podataka, ishodi, posebno numerički se tretiraju kao opažanje. Postupak realizacije vrijednosti mjerene veličine nazivamo mjerenje.

Složenost postupka mjerenja slijedi iz njegovih osnovnih karakteristika (Božić, 2007):

- mjerenje je uvijek izvršenje neke fizičke radnje – proces mjerenja sadrži nekoliko elementarnih radnji (priprema, postavljanje instrumenta-centrisanje i horizontisanje, kalibracija, viziranje, čitanje, upoređivanje, ...),
- numerički podatak ili rezultat procesa mjerenja,
- mjerenje se skoro uvijek realizira instrumentima, neovisno od složenosti (izuzetak brojanje nekog događaja),
- mjerenje je vezano za standarde, donesene konvencije, koje se najčešće dobiju dogovorom – mjeriti znači uporediti sa standardom (etalonom), svako mjerenje vezano za jedinicu mjerenja i dimenzije,
- suštinski mjerenja su vezana za teorijski koncept tj. geometrijske apstrakcije npr. uglovi i dužine nemaju direktan realan i fizički definiran ekvivalent u prirodi; u praksi geometrijske apstrakcije se koriste da bi opisale i definirale neke veličine kao što su položaj, površina, zapremina, i dr.,
- iako je realizacija mjerenja proces, rezultati takvih procesa nose značenje mjerenja jedino ako su povezani s teorijskim konceptima na koje se odnose i na kojima su zasnovani.

Metoda mjerenja definira se kao logična sekvenca operacija korištenih prilikom realizovanja mjerenja.

Procedura mjerenja predstavlja skup posebno utvrđenih operacija koje se koriste u izvršenju nekog mjerenja u skladu sa odabranom metodom mjerenja.

Procedura mjerenja čini više faza:

- etaloniranje (kalibracija) mjernih instrumenata i pribora, usklađivanje jedinice mjere mjernog instrumenta sa njenom teoretskom vrijednošću,
- priprema za mjerenje (materijalizacija mjerne veličine – signalima za viziranje, postavljanje instrumenta i pribora, ...),
- opažanje, poklapanje mjernog indeksa (koincidiranje) i očitavanje podjele mjernog instrumenta (pribora),
- mjerenje pomoćnih veličina, temperature, atmosferskog pritiska, vlažnosti zraka ili neke druge veličine neophodne za korekciju dobivenih rezultata mjerenja.

1.1.1 Direktna i indirektna mjerenja

Mjerenje predstavlja instrumentalno određivanje vrijednosti mjerene veličine u odnosu na dati standard ili jedinicu mjerenja. Mjerenje se izražava kao broj jedinica mjere (realan broj puta jedinica mjere). Rezultat mjerenja X povezan je jedinicom mjerenja relacijom:

$$X = NE \tag{1.1}$$

gdje je u jed. (1.1) N mjerni broj, E jedinica mjere.

Proces mjerenja obuhvata procjenu vrijednosti mjerene veličine i veličine odgovarajuće mjerne jedinice. Osim u slučaju kada zbrajamo neke događaje (npr. broj studenata u učionici) gdje je zbir egzaktan, svako mjerenje predstavlja procjenu koja posjeduje izvjesnu nesigurnost. Direktna mjerenje izvode se određivanjem vrijednosti mjerene veličine direktnim očitavanjem na skali instrumenta (npr. mjerene veličine $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ mogu biti dužine, pravci, čitanje na letvi i sl.).

Mjerenje je složen proces koji podrazumjeva (A Beginner's Guide to Measurement,[2]) (Goldsmith, 2010):

- objekat mjerenja (fizička veličina)
- subjekat mjerenja (opažač)
- instrument i pribor za mjerenje
- spoljašnja sredina (vidi iz uvoda za mjerenje – prevod i citiraj)

Skup navedenih faktora naziva se kompleksnim uslovima mjerenja. Dva skupa mjerenja smatraju se skupovima iste tačnosti ako su mjerenja izvedena pod približno istim uslovima. Ovo znači da tokom izvođenja mjerenja ni jedan od uslova nije značajno mijenjan (isti objekt, isti opažač, isti instrument ili instrument sa istim karakteristikama, te u istim ili sličnim uslovima spoljašnje sredine). Nasuprot navedenom, dva skupa mjerenja ako nisu izvedena pod istim uslovima (makar jedan element da je značajnije promijenjen) su mjerenja različite tačnosti. Na osnovu navedenog, podjela mjenja po tačnosti posljedica je uticaja kompleksnih uslova pri mjerenju neke fizičke veličine.

Indirektna mjerenja realizuju se kada nije moguće izvesti direktna mjerenja. U ovakvim slučajevima do vrijednosti mjerene veličine dolazi se primjenom matematičkih operacija nad direktnim mjerenjima. S obzirom na matematičke relacije između direktnih i indirektnih mjerenja, greške mjerenja direktnih veličina prenose se na indirektna mjerenja.

[2] Upustvo za početnike u mjerenju

1.1.2 Izvori grešaka mjerenja

Usprkos tome što seriju mjerenja izvede isti opažač, pri mjerenju upotrijebi isti instrument i uslovi okoline u momentu mjerenja su isti rezultati pojedinih mjerenja nikada nisu teorijski iste vrijednosti. Mjerenja su uvijek opterećena greškama!

Važno je istaknuti nekoliko veoma značajnih karakteristika mjerenja kao što su:

- ne postoji tačan rezultat mjerenja
- u svakom mjerenju prisutne su greške
- tačna vrijednost nikada nije poznata
- tačne vrijednosti prisutnih grešaka nisu poznate

Po definiciji greška mjerenja je razlika mjerene X vrijednosti i istinite vrijednosti μ, tj. istinita greška data je izrazom u jed. (1.2):

$$e = X - \mu \tag{1.2}$$

Na osnovu prethodno iznesenog mogu se izdvojiti tri izvora grešaka mjerenja (Božić, 2007):

- instrumentalne,
- spoljašnje sredine i
- opažača.

Greške instrumentalnog karaktera nastaju usljed nesavršenosti konstrukcije instrumenta ili neispunjavanja uslova osnovnih osa instrumenta (npr. podjela limba teodolita ili totalne stanice nije savršena i uvijek postoji bilo da se radi o manualnom ili digitalnom načinu čitanja).

Greške spoljašnjih uslova nastaju kao posljedice promjene okolnosti u kojima se izvode mjerenja (npr. promjena temperature, pritiska, vlažnosti, magnetskog ili gravitacionog polja i sl.).

Greške opažača nastaju zbog psiho-fizičkih ograničenja i bioloških sposobnosti opažača prilikom centrisanja, viziranja, očitavanja i sl. Veličine ove greške su ovisne od pojedinačnih individualnih sposobnosti opažača, te od uticaja mikroprilika u neposrednom okruženju opažača.

1.1.3 Podjela grešaka prema prirodi uticaja

Promjena rezultata mjerenja izvedenih pod sličnim uslovima je normalna pojava vezana za fizičke procese i mora se prihvatiti svojstvo opažanja. Može se zaključiti da su rezultati mjerenja numeričke vrijednosti slučajnih promjenljivih koje su predmet slučajnih promjena. Ukoliko ovu činjenicu prihvatimo opažanja se mogu analizirati koristeći statističke metode koje nam pomažu da dođemo do najvjerovatnijih vrijednosti rezultata mjerenja i ocjenom njihovog kvaliteta.

Prema načinu nastanka i osnovnim svojstvima greške dijelimo na:

- grube
- sistematske
- slučajne

Grube greške u stvari nisu greške u pravom smislu, jer značajno odstupaju po veličini u odnosu na druge dvije kategorije. Najčešći razlog njihovog pojavljivanja je nepažnja opažača. Ukoliko je proces automatiziran, ove greške mogu nastati kao posljedica neispravnosti uređaja. Velika su nastojanja da se greška ove vrste uoči. U skladu s ovim neophodno je proceduru mjerenja i metodologiju rada tako dizajnirati da se pojava ovih grešaka može eliminisati. Tako da koristimo različite mehanizme: više nezavisnih mjerenja, testiranje na pripadnost skupu, ponavljanje mjerenja sa drugim instrumentom, mjerenje naprijed nazad, strogo poštivanje metode mjerenja, pažljiva kontrola instrumenta, i dr.

Otkrivanje i eliminisanje sumnjivih rezultata možemo učiniti:

- mjerenjem veličine više puta i računanjem srednje vrijednosti (pojedinačni rezultati koji značajno odstupaju od srednje vrijednosti smatra se rezultatom sa grubom greškom),
- korištenjem dvije vrste mjernih jedinica, i njihovim svođenjem na istu,
- korištenjem prirodnih činjenica (zbir uglova u trouglu je 180°)
- nezavisna mjerenja više operatora i dr.

Moderni statistički koncepti tretiraju opažanja kao uzorke određene razdiobe vjerovatnoće i njihove promjene analizira koristeći pravila zakona vjerovatnoće. Rezultati koji odskaču po svojoj vrijednosti u odnosu na ostale mogu se utvrditi ili odbaciti, po potrebi se izvrše ponovna mjerenja. Jednostavno rečeno, rezultati sa grubom greškom nisu od koristi u daljnjem postupku obrade i kao takvi moraju se isključiti iz skupa.

Sistematske greške ili sistematski efekti događaju se po nekom sistemu, ako je poznat, može biti matematički formulisan. Ove greške slijede neko pravilo, ponavljanjem mjerenja pod istim uslovima, mjerenja će biti po istom pravilu uvijek opterećena greškom.

Uzrok nastanka može biti u opažaču, instrumentu (priboru) za mjerenje ili fizičkim svojstvima u kojem se mjerenje ostvaruje. Bilo koja promjena jednog ili više parametara sistema prilikom ponavljanja mjerenja izazvaće promjenu karaktera sistematskih efekata. Mora se znati da ponavljanjem mjerenja pod istim okolnostima neće eliminirati sistematsku grešku. Da bi se greške eliminisale, mora se pronaći njihov sistem – uzrok.

Sistematski efekti imaju različite forme, zavisno od vrijednosti i znaka svakog od uticaja. Ako su veličina i znak jednaki u procesu mjerenja, govorimo o konstantnoj vrijednosti greške. Ako se znak sistematskog uticaja mijenja, rezultujuće sistematske greške nazivaju se promjenljivim.Temperatura, pritisak i vlažnost su primjeri prirodnih izvora sistematskih grešaka. Kada je riječ o instrumentu za mjerenje tada se misli na nesavršenost instrumentalne konstrukcije ili neodgovarajući pregled i priprema za mjerenje.

Uvođenje automatizacije u proces mjerenje nije isključio opažača kao izvor nastanka sistematskog uticaja i njegova uloga i dalje ima ključno mjesto. I pored toga što se može predpostaviti odakle potiču i dalje ima sistematskih uticaja čije porijeklo je nepoznato. To se najprije odnosi na skup grešaka čiji izvor je opažač i koje zavise od preciznih fizičkih, psiholoških i prostornih za vrijeme trajanja mjerenja.

Pored izvora sistematskih grešaka koji se direktno odnose na mjerenja, postoje i oni koji se odnose na odabrani geometrijski i matematički model rezultata mjerenja. Pogrešan izbor modela prouzrokuje pojavu sistematskog uticaja. Eliminiranje, odnosno svođenje sistematske greške na najmanju moguću mjeru, čestim ispitivanjem instrumenata i pribora i uzimanjem korekcija, uvođenjem korekcija u zavisnosti od uvjeta okoline, biranjem odgovarajuće metode mjerenja kao i strogo pridržavanje propisane procedure mjerenja.Nakon otkrivanja i eliminiranja grubih grešaka i otklanjanja sistematskih uticaja, rezultati mjerenja u daljnjem postupku mogu tretirati kao **slučajne promjenljive.**

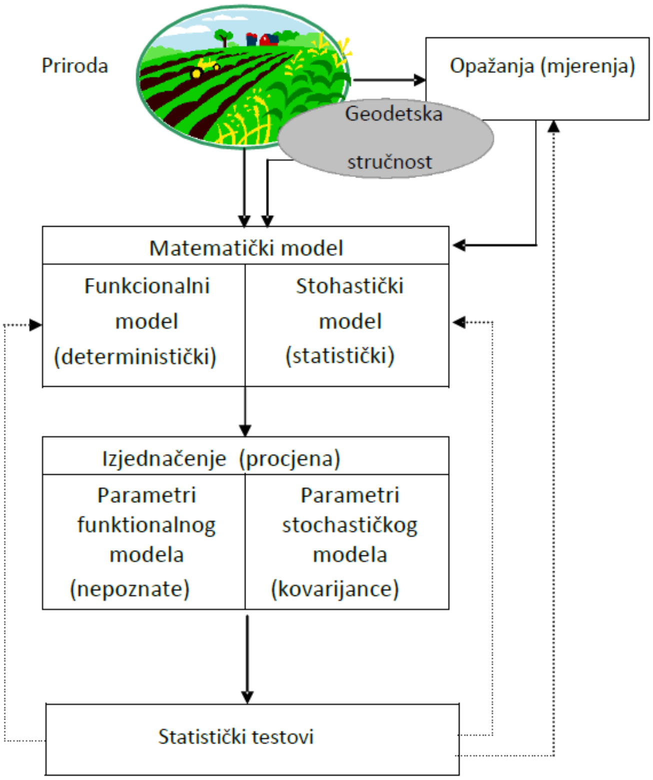
Slučajne greške mjerenja posljedica su ograničenih mogućnosti ljudskih osjetila, nakon kalibracije preostalih slučajnih varijacija mjernih instrumenata, te nepredvidljivih slučajnih promjena mjernog objekta ili njegovog okoliša tj. one nastaju slučajno. Zbog svega navedenog, više puta ponovljena mjerenja - izvedena uz najveću moguću pažnju i vještinu opažača i nakon uklonjenih grubih i sistematskih grešaka – neće dati identične rezultate, jer će preostale slučajne greške biti različitog iznosa i različitog predznaka. Iako je slučajnu grešku nemoguće pojedinačno otkriti, njihovo skupno ponašanje podliježe zakonima slučajnih promjenljivih, te ih je što je broj mjerenja veći moguće pouzdanije izračunati.

1.2 Matematički model

Obrada podataka mjerenja općenito predstavlja kvantitativni problem, logično je da njegovo rješavanje podrazumjeva korištenje matematičkog modela. Model se definiše kao teorijski sistem ili apstraktni aspekt kojim se opisuje fizička situacija ili skup nekih događaja. Često nije kompletan, ali se očekuje da obuhvati osnovne osobine koje su cilj i predmet analize. Kako model ima ograničenu namjenu, njegova postavka ima široko značenje, odnosno najčešće ne postoji samo jedan model, nego se ista situacija može opisati s više modela (Božić, 2007).

Matematički model se sastoji iz dva dijela: funkcionalnog modela i stohastičkog modela (vidi Slika 1-1) .

Funkcionalni model opisuje deterministička svojstva fizičke situacije ili događaja koji posmatramo.



Slika 1-1: Matematički model geodetskih mjerenja (prema prema (Lother & Strehle, 2007))

Kada se planiraju mjerenja funkcionalni model se bira tako reprezentuje fizičku veličinu ili zamišljeni sistem kojem će se pridružiti izvedena mjerenja.

Mjerenja se zapravo i izvode da bi se odredili neki ili svi parametri odabranog modela. Jedan primjer primjer je geometrijski model trogla u ravni kojeg u

Euklidovom prostoru karakterišu tri ugla, tri tjemena (vrha), tri strane i orijentacija u odnosu na odabrani koordinatni sistem (Božić, 2007).

Procjena veličine Y označena sa y dobije se na osnovu procjena $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ od n vrijednosti fizičkih veličina $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Prema tome, vrijednost izlazne veličine ili njene procjena y je data izrazom u jed. (1.3) :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \tag{1.3}$$

Stohastički model opisuje ne determinističke ili stohastičke (po vjerovatnoći) osobine promjenljivih koje reprezentuju opažanja. Poznata činjenica je da mjerenja prate različiti izvori grešaka koje nije moguće u potpunosti kontrolisati. Usljed nepredvidivih uticaja, rezultati mjerenje variraju i neizbježan su pratilac mjerenja. Gledano s praktične strane, veoma je teško ocijeniti statističke osobine mjerenja. jedan od načina je mjerenjem iste veličine u više serija ili poređenjem izvedenih mjerenja s ranije izvedenim pod istim okolnostima. Međutim, veoma često je da se statističke osobine mjerenja približno definišu (npr. često prilikom obrade tvrdimo da su nezavisna i istih težina). Prema tome, stohastičkim modelom smatra će se ukupnost predpostavki o statističkim osobinama promjenljivih.

Oba modela sastavni su i obavezni dijelovi matematičkog modela kojim se povezuju rezultati mjerenja i mjerene veličine i ne treba ih od njega odvajati.

2 Teorija grešaka mjerenja

U ovom poglavlju obrađena je opća teoriju slučajnih grešaka i definisane neke od osnovnih metoda kojima se u okviru skupa izvedenih mjerenja otkrivaju i izoluju preostale grube greške.

2.1 Slučajna promjenljiva

Vjerovatnoća i statistički događaji povezani su, bilo da su realni ili hipotetički. Događaj se definiše kao ishod statističkog eksperimenta (mjerenja ugla, dužine, visinske razlike, bacanja kocke i sl.). Ukoliko statistički događaj ima više ishoda događaju se pridružuje stohastička ili slučajna promjenljiva X. Slučajna promjenljiva X se definiše kao jedinstvena realna vrijednost funkcije definisane u prostoru vjerovatnoća elementarnih događaja s_i u skupu S. U vjerovatnoći se polazi od pretpostavke da se sistem ponaša po poznatom matematičkom modelu. Ukupnost elemenata koje treba proučiti i nivo zahtijevanih informacija vezanih za njih, naziva se populacijom. U teorijskom smislu, populacija sadrži neograničen broj elemenata (mjerenja). Populacija uključuje sve moguće vrijednosti slučajnih promjenljivih koje su predmet analize. Drugim riječima, populaciju čini sveukupnost svih mogućih ishoda staističkog događaja vezanih za slučajnu promjenljivu. Zbog velikog obima, da bi se ispitale sve karakteristike populacije, bilo bi nepraktično analizirati sve njene elemente. Zbog toga, iz populacie se izdvaja jedan ograničen broj mjerenja, koji nazivamo uzorak i nad kojim se izvode dalje analize. Analizom uzorka, dolazi se do zaključaka i donose tvrdnje o populaciji kojoj analizirani uzorak pripada.

Metod izbora uzorka i njegove veličine utiče na pouzdanost izvedenih zaključaka. Očigledno je, da što je veći uzorak to će zaključci biti pouzdaniji. Ni malo nije lagan zadatak odabrati reprezentativan uzorak. Brojni problemi izazivaju izbor nereprezentativnog uzorka koji neće dati realne rezultate. Prilikom izbora odgovarajućeg uzorka, mora se voditi računa da elementi budu odabrani po principu slučajnosti, što znači da svaki element populacije ima istu šansu postati elementom uzorka. Navedena tvrdnja ekvivalentna je sljedećoj – elementi uzorka međusobno su nezavisni, a njihov izbor je slučajan.

Ukupan skup mogućih vrijednosti slučajne promjenljive X, zajedno s njenim vjerovatnoćama u statistici se naziva rasporedom vjerovatnoće slučajne promjenljive. Raspored vjerovatnoće opisuje različite vjerovatnoće mogućih vrijednosti slučajne promjenljive. Postoje dva tipa funkcije: funkcija kumulativnog rasporeda vjerovatnoće i funkcija gustina vjerovatnoće (Božić, 2007).

2.1.1 Funkcija kumulativnog rasporeda vjerovatnoća

Funkcija kumulativnog rasporeda slučajne promjenljive X u jed. (2.1) označena kao $F(x)$ definiše se kao:

$$P(X < x) = F(x) \tag{2.1}$$

i opisuje se na sljedeći način – vjerovatnoća da slučajna da slučajna promjenljiva X im avrijednosti manje od x ekvivalentna je vrijednosti funkcije kumulativnog rasporeda $F(x)$. Kako su vjerovatnoće aksiomatski definisane kao ograničena vrijednost između 0 i +1 ($0 \leq P \leq +1$), funkcija $F(x)$ zadovoljava sljedeće granične uslove:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ i } \lim_{x \to \infty} F(x) = +1 \tag{2.2}$$

Iako se gore navedeni uslovi u jed. (2.2) odnose na diskretne i kontinuirane promjenljive veličine, u daljim razmatranjima odnosit će se na kontinuirane promjenljive.

2.1.2 Funkcija gustina vjerovatnoća

Funkcija gustina vjerovatnoća (Slika 2-1) definiše se kao vjerovatnoća pojave slučajne promjenljive u određenom intervalu. Polazeći od diferencijabilne kontinuirane funkcije, odnos između $F(x)$ i $f(x)$ glasi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr \tag{2.3}$$

i

$$f(x) = \frac{\partial F(X)}{\partial x} \tag{2.4}$$

Na osnovu gornjih izraza u jed. (2.3) i jed. (2.4)mogu se izvesti sljedeći zaključci:

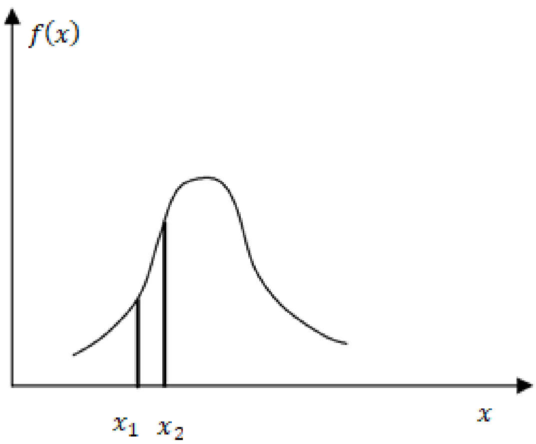
- vjerovatnoća da će slučajna promjenljiva X biti u intervalu x_1 i x_2 za $x_2 > x_1$ jednaka je:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(r)dr \tag{2.5}$$

- vjerovatnoća da će slučajna promjenljiva X primiti vrijednosti manje od vrijednosti x_1 daje se sljedećim izrazom u jed. (2.6):

$$P(-\infty < X < x_1) = F(x_1) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{x_1} f(r)dr \tag{2.6}$$

gdje je preme jed. (2.2) $F(-\infty) = 0$.



Slika 2-1: Funkcija gustine vjerovatnoće

- slično prethodnom zaključku, vjerovatnoća da će promjenljiva X primiti vrijednosti veće od vrijednosti x_1 daje se sljedećim izrazom u jed. (2.7):

$$P(x_1 < X < \infty) = F(\infty) - F(x_1) = 1 - F(x_1) = \int_{x_1}^{\infty} f(r)dr \tag{2.7}$$

gdje je na osnovu jed. (2.2) $F(\infty) = 1$.

Na osnovu svega prethodno rečenog mogu se dati dva uslova koji karakterišu funkciju gustine vjerovatnoće $f(x)$:

- $f(x) \geq 0$ za svako x

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, s obzirom na to da je broj vrijednosti x beskonačan i da je površina ispod krive linije gustina mora biti jednaka 1.

Da bi funkcija ima karakter funkcije gustine vjerovatnoće ova dva uslova mora da ispunjava.

Treba napomenuti, da se funkcija gustine vjerovatnoće odnosi na čitavu populaciju. Populacija se obično predstavlja određenim brojem promjenljivih koje se nazivaju parametrima populacije. Poznavanje parametara populacije u potpunosti specificira funkciju gustoće. Parametre uzorka neke populacije nazivamo statistikama. Svaka statistika dobivena iz uzorka predstavlja i reprezentuje procjenu odgovarajućeg parametra populacije.

2.2 Višedimenzionalni rasporedi, marginalni i uslovni rasporedi i nezavisnost slučajnih promjenljivih

Prethodno opisani koncept podrazumjeva jednu promjenljivu. U većini situacija susrećemo se s modelima s više promjenljivih veličina. U slučaju kada npr. imamo dvije slučajne promjenljive X i Y, govorimo o dvodimenzionalnoj funkciji kumulativnog rasporeda $F(x, y)$. Vjerovatnoća da će X po vrijednosti biti manja x od i Y manja y (x i y slučajne promjenljive) iznosi:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) \tag{2.8}$$

Slično kao kod jedne promjenljive, ako je sa $f(x, y)$ označena dvodimenzionalna funkcija gustine vjerovatnoće i ako predpostavimo da je diferencijabilna kontinuirana tada je:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{2.9}$$

a,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dudv \tag{2.10}$$

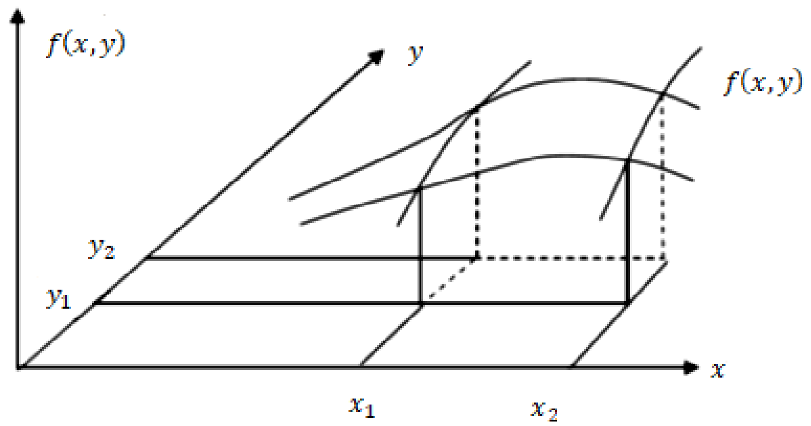
Kao kod jednodimenzionalne funkcije, vrijednost vjerovatnoće nalaze se u intervalu $0 \leq P \leq 1$, jer je:

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0 \text{ i } \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = 1 \tag{2.11}$$

Konačno, vjerovatnoća da dvije slučajne promjenljive X i Y po vrijednosti budu između x_1 i x_2, te y_1 i y_2 iznosi:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(u, v)\, du dv \tag{2.12}$$

Geometrijska interpretacija zajedničkog dvodimenzionalnog rasporeda gustine vjerovatnoće može se prikazati slično jednodimenzionalnom (Slika 2-2). Vjerovatnoća u intervalu $x_1 \to x_2$ i $y_1 \to y_2$ jednaka je zapremini tijela koje formira površ $f(x, y)$, ravan (x, y), te vertikalne ravni $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$ i $y = y_2$.



Slika 2-2: Raspored vjerovatnoće dvodimenzionalne funkcije (prema (Perović, 2005))

Kod n dimenzionalnog slučaja, n slučajnih promjenljivih sadržan je u vektoru $\boldsymbol{X}$ oblika:

$$\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_n]^{\mathrm{T}} \tag{2.13}$$

Za dati vektor, n dimenzionalna funkcija rasporeda gustine vjerovatnoće $f(x)$ glasi:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \tag{2.14}$$

a njoj korespodentna funkcija kumulativnog rasporeda je:

$$F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \tag{2.15}$$

Vjerovatnoća da vektor slučajne promjenljive $\boldsymbol{X}$ bude po vrijednosti manji od $\boldsymbol{x}$ iznosi:

$$F(x) = P(X < x) = \tag{2.16}$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n$$

Iako izvedeni izrazi pokazuju izvjesno uopštavanje jednodimenzionalnog slučaja, dvodimenzionalni i n dimenzionalni slučajevi značajno se razlikuju i kao takvi generišu pojavu novih koncepata kao što su: marginalni raspored, uslovni raspored, nezavisnost i koleriranost.

2.2.1 Marginalni raspored

Marginalni raspored definiše se iz n dimenzionalnog rasporeda (za $n \geq 2$) ignorisanjem rasporeda jedne ili više komponenti vektora slučajne promjenljive $\boldsymbol{X}$. Prema tome, funkcija marginalnog kumulativnog rasporeda slučajne promjenljive $\boldsymbol{X}$ jednaka je zajedničkoj vjerovatnoći od $\boldsymbol{X}$ za vrijednosti $\boldsymbol{X}$ manje od x_1 i Y manje od $+\infty$, odnosno:

$$F_m(X) = P(X < x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\, du dv \tag{2.17}$$

Funkcija zajedničkog rasporeda gustina $f(x, y)$ redukuje se u marginalan oblik i glasi:

$$f_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv \tag{2.18}$$

Na osnovu koje se dobije funkcija marginalnog kumulativnog rasporeda od $\boldsymbol{X}$ oblika:

$$F_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{X} f_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{X}) dX = P(X < x) \tag{2.19}$$

2.2.2 Nezavisnost slučajnih promjenljivih

Neka je $F(x, y)$ funkcija zajedničkog kumulativnog rasporeda dvije slučajne promjenljive X i Y i neka su $F(x)$ i $F(y)$ funkcije marginalnog kumulativnog rasporeda od X i Y. Za dvije slučajne promjenljive X i Y kaže se da su nezavisne ako vrijedi sljedeće:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_m(X)} \tag{2.20}$$

Koncepti nezavisnosti i uslovnog rasporeda međusobno su direktno vezani. Ukoliko su dvije slučajne promjenljive X i Y nezavisne, uslovni raspored od Y za dato X isti je za bilo koju vrijednost od X i obrnuto, što se simbolički može prikazati na sljedeći način:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_m(X)} = \frac{f_m(x)f_m(y)}{f_m(X)} = f_m(y) = f(y) \tag{2.21}$$

2.3 Očekivane vrijednosti slučajnih promjenljivih, varijance, kovarijanca, korelacija i momenti

Rasporedi i funkcija gustoće slučajne promjenljive X karakterišu parametri na osnovu kojih se ostvaruje uvid u ponašanje promjenljive.

2.3.1 Očekivana vrijednost slučajne promjenljive

Očekivana vrijednost slučajne promjenljive X u oznaci $E(X)$, ako postoji, definiše se kao prosječna vrijednost μ_x svih mogućih vrijednosti slučajne promjenljive i računa se na osnovu izraza:

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{n} X_i P(X_i) \tag{2.22}$$

gdje je $P(X_i)$ vjerovatnoća njene pojave. Za kontinuiranu slučajnu promjenljivu X funkcija gustoće je $f(x)$, vrijednost za očekivanje je:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{x} x f(x) dx \tag{2.23}$$

Kada je riječ o očekivanoj vrijednosti vrijede sljedeća pravila:

- $E\big(E(X)\big) = E(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(c) = c$
- $E(cX) = cE(X)$

gdje je c konstanta.

Za dvije nezavisne slučajne promjenljive vrijedi:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \tag{2.24}$$

Na kraju, također vrijedi i sljedeće:

$$E(X^2) \neq \big(E(X)\big)^2 \tag{2.25}$$

2.3.2 Varijanca slučajne promjenljive

Neka je $g(X)$ definisana kao u jednačini (2.26):

$$g(X) = \big(X - E(X)\big)^2 = (X - \mu_x)^2 \tag{2.26}$$

Očekivana vrijednost funkcije $g(X)$ naziva se varijancom slučajne promjenljive X i definiše se kao:

$$\begin{aligned} var(X) = \sigma_x^2 = E\big(g(X)\big) = E\left[\big(X - E(X)\big)^2\right] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)\, dx \end{aligned} \tag{2.27}$$

gdje je $f(x)$ funkcija gustoće kontinuirane slučajne promjenljive X. Pozitivna vrijednost kvadratnog korijena naziva se standardno odstupanje i označava se kao σ_x. Varijanca i standardno odstupanje predstavljaju mjere disperzije slučajne promjenljive. Primjenom pravila vezana za očekivanu vrijednost, drugi oblik izraza za očekivanu vrijednost glasi:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = E\left[\big(X - E(X)\big)^2\right] &= E[(X - \mu_x)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu_x + \mu_x^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu_x E(X) + E(\mu_x^2) \\ &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.3.3 Kovarijanca i korelacija

Slično kao u slučaju varijance jedne slučajne promjenljive, za dvije slučajne promjenljive definiše se kovarijanca. Dvije slučajne promjenljive X i Y koje imaju zajedničku funkciju gustoće $f(x, y)$ definišu sljedeću funkciju izrazom:

$$h(X, Y) = \left[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\right] = \left[(X - \mu_x)\big(Y - \mu_y\big)\right] \tag{2.29}$$

Kovarijanca između slučajnih promjenljivih X i Y definiše se kao očekivana vrijednost funkcije $h(X, Y)$ na sljedeći način:

$$cov(X, Y) = \sigma_{xy} = E[h(X, Y)] = E\left[(X - \mu_x)\big(Y - \mu_y\big)\right] \tag{2.30}$$

U slučaju da imamo kontinuirane slučajne promjenljive X i Y vrijedi izraz iz jednačine:

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\,f(x,y)dxdy \tag{2.31}$$

Kao što varijanca slučajne promjenljive izražava varijacije njenog rasporeda, kovarijanca opisuje međusobne promjene dvije slučajne promjenljive. Međutim, kovarijanca nije pogodna kao mjera odnosa dvije promjenljive, jer zavisi od jedinice mjere ovih promjenljivih. Da bi se ovaj nedostatak otklonio, njihov međusobni odnos ili korelacija dvije promjenljive izražava se koeficijentom korelacije i računa se pomoću izraza u jed. :

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = E\left(\frac{\big(X-E(X)\big)}{\sigma_x}\frac{\big(Y-E(Y)\big)}{\sigma_y}\right) \tag{2.32}$$

gdje su σ_x i σ_y standardna odstupanja marginalnih rasporeda od promjenljivih X i Y. Korelacija dvije slučajne promjenljive opisuje njihovu međusobnu zavisnost i ne treba miješati sa stohastičkom zavisnošću koja se definiše saglasno konceptu uslovnih rasporeda. Korelacija i statistička zavisnost nisu isto. Kovarijanca σ_{xy} uvijek je nula u slučaju da su slučajne promjenljive X i Y statistički nezavisne. Međutim, općenito obrnuto ne važi. Pa prema tome, nulta kovarijanca ne znači statističku nezavisnost. U slučaju višedimenzionalne normalne raspodjele, nulta kovarijanca znači i dovoljan uslov za statističku nezavisnost. Koeficijent korelacije može biti u intervalu $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

2.4 Momenti

Srednja vrijednost, varijanca i kovarijanca su specijalni slučajevi općeg koncepta, koji je poznat pod imenom statistički momenti. Očekivana vrijednost opće funkcije $g(X) = (X-c)^k$, gdje je c konstanta koja može, ali i ne mora biti jednaka nuli naziva se statistički moment k-tog reda slučajne promjenljive X u okolini c, odnosno:

$$\overline{m}_k = E\big((X-c)^k\big) \tag{2.33}$$

Ako jednačinu (2.33) primijenimo na jednačine za očekivanu vrijednost u jed. (2.22) i jed. (2.23) u slučaju kada je $c = 0$ dobiju se sljedeći izrazi:

$$\overline{m}_k = E\big(X^k\big) = \sum_{i=1}^{n} X_i^k\,P(X_i) \tag{2.34}$$

Za diskretnu slučajnu promjenljivu, a za kontinuiranu slučajnu promjenljivu izraz je:

$$\overline{m}_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(X) dX \tag{2.35}$$

Klasa momenata defisana jed. (2.35) uključuje tzv. centralne momente koji su od posebne važnosti u praksi. U ovoj grupi momenata konstanca c ima vrijednost:

$$c = \mu_X = E(X) \tag{2.36}$$

tako da centralni moment predstavlja očekivanje u odnosu na srednju vrijednost ili matematički napisano:

$$\overline{m}_k = E\left[\left(X - E(X)\right)^k\right] \tag{2.37}$$

Ako se vratimo na definiciju varijance dolazimo do zaključka da predstavlja specijalni slučaj jed. (2.37), u slučaju kada je $k = 2$. Prema tome, varijanca σ_X^2 slučajne promjenljive X predstavlja centralni moment drugog reda, odnosno $\overline{m}_2 = \sigma_X^2$.

Različiti momenti slučajne promjenljive X predstavljaju osobine njene funkcije gustoće. Ako je funkcija gustoće simetrična u odnosu na prvi moment $\overline{m}_1 = E(X) = \mu_X$, svi neparni centralni momeni su jednaki nuli. Nasuprot, ako su neparni momenti različiti od nule, njihova vrijednost ukazuje na stepen asimetričnosti ili spljoštenosti funkcije gustoće.

U slučaju dvodimenzionalnog vektora slučajne promjenljive $\boldsymbol{X}$ tri su centralna momenta drugog reda od posebnog značaja. Ako centralne momente drugog reda dvodimenzionalnog vektora označimo kao $\overline{m}_{10}$ i $\overline{m}_{01}$ promjenljiveih x i y, respektivno, tada centralni momenti izgledaju:

$$\begin{aligned} \overline{m}_{20} &= E\{(x - \overline{m}_{10})^2\} = E((x - \mu_x)^2) = \sigma_x^2 \\ \overline{m}_{02} &= E\{(y - \overline{m}_{01})^2\} = E\left(\left(y - \mu_y\right)^2\right) = \sigma_y^2 \\ \overline{m}_{11} &= E\{(x - \overline{m}_{10})(y - \overline{m}_{01})\} = \\ &= E\left((x - \mu_x)\left(y - \mu_y\right)\right) = \sigma_{xy} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Općenito, u slučaju n dimenzionalnog vektora slučajne promjenljive $\boldsymbol{X}$, centralni moment drugog reda definiše se između svih elemenata vektora. Ovako definisani momenti mogu se urediti u matrici koju nazivamo matrica centralnog momenta drugog reda ili varijanc kovarijanc matrica. Ova matrica je kvadratna i ima sljedeću formu:

$$\boldsymbol{M}_{xx} = \boldsymbol{K}_{xx} = \begin{bmatrix} m_{x_1x_1} & m_{x_1x_2} & \cdots & m_{x_1x_n} \\ m_{x_2x_1} & m_{x_2x_2} & \cdots & m_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{x_nx_1} & m_{x_nx_2} & \cdots & m_{x_nx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \cdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma} \tag{2.39}$$

2.5 Normalna raspodjela

Normalna raspodjela ima veoma značajnu ulogu u analizi slučajnih promjenljivih. Za slučajnu promjenljivu X kažemo (Slika 2-3) da pripada slučajnoj raspodjeli sa parametrima μ i σ^2, u oznaci $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ukoliko je njena funkcija gustoće definisana sljedećim izrazom u jed. (2.40)

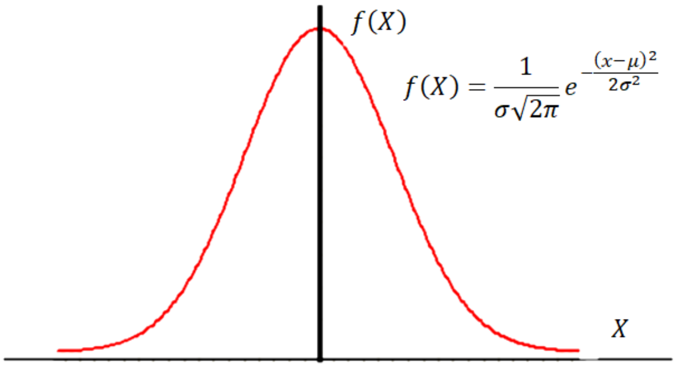
$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{za} \quad -\infty < X < +\infty \tag{2.40}$$

Osnovne osobine funkcije gustoće normalne raspodjele su:

- funkcija gustoće vjerovatnosti normalnog rasporeda simetrična je u odnosu na srednju vrijednost,
- srednja vrijednost je i moda i medijana,
- prevojne tačke funkcije su udaljene za vrijednost σ od srednje vrijednosti,
- funkcija se asimptotski približava nuli kada $X \to \infty$,
- vjerovatnoća da promjenljiva X bude u intervalu između vrijednosti X_1 i X_2 definisana je krivom raspodjele osom X i granicama intervala $X = X_1$ i $X = X_2$

Vjerovatnoća za neke karakteristične vrijednosti intervala iznose:

$$P[-\sigma_X < X - \mu_X < +\sigma_X] = 0.6827$$
$$P[-2\sigma_X < X - \mu_X < +2\sigma_X] = 0.9545$$
$$P[-3\sigma_X < X - \mu_X < +3\sigma_X] = 0.9973$$



Slika 2-3: Funkcija vjerovatnosti gustoće normalne raspodjele

- Vrijednosti apscisa koje odgovaraju vjerovatnoćama od 0.90, 0.95, 0.99 su sljedeće:

$$P[-1.645\sigma_X < X - \mu_X < +1.645\sigma_X] = 0.90$$

$$P[-1.960\sigma_X < X - \mu_X < +1.960\sigma_X] = 0.95$$

$$P[-2.576\sigma_X < X - \mu_X < +2.576\sigma_X] = 0.99$$

- Vjerovatnoća da slučajna promjenljiva ima vrijednost manju od μ iznosi 0.50

Izraz u jednačini (2.40) predstavlja vjerovatnoću pojave greške u intervalu $(X, X + dX)$ gdje je dX beskonačno mala veličina. Kako je već prije navedeno vjerovatnoća pojave greške odgovara površini ispod krive oivičene s vrijednostima $y = X$ i $y = X + dX$ (Slika 2-4). Ukupna površina ispod krive vjerovatnoće gustoće normalne raspodjele je 1.

Uvođenjem da je $\mu = 0$ u jednačini (2.40) vjerovatnoća se računa kao:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}} dX = 1 \tag{2.41}$$

Ako u jed. (2.40) za $\mu = 0$ usvojima da je $y = f(X)$ i diferenciramo po X dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-X}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}\right) \tag{2.42}$$

gdje je gornji izraz može biti napisan kao:

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-X}{\sigma^2} y \tag{2.43}$$

Drugi izvod funkcije iz jednačine (2.43) ako je $\mu = 0$ bit će:

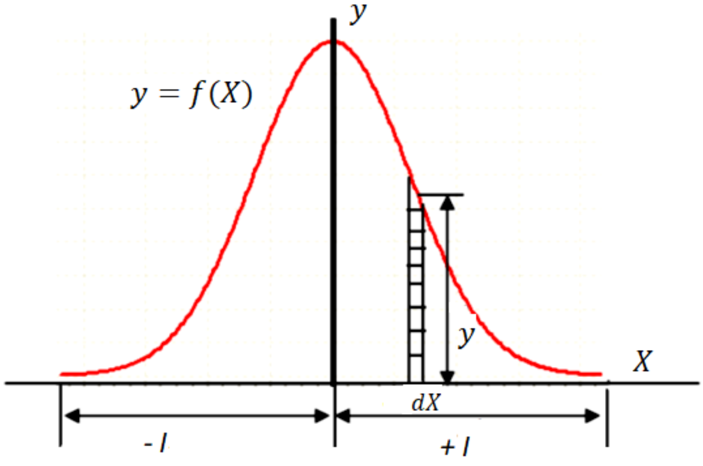
$$\frac{d^2y}{dX^2} = -\frac{X}{\sigma^2}\frac{dy}{dX} - \frac{y}{\sigma^2} \tag{2.44}$$

Ako se u jed. (2.43) uvrsti jed. (2.44) dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{X^2}{\sigma^4} y - \frac{y}{\sigma^2} \tag{2.45}$$

Ovaj izraz može biti napisan i kao:

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{y}{\sigma^2}\left(\frac{X^2}{\sigma^2} - 1\right) \tag{2.46}$$



Slika 2-4: Vjerovatnoća pojave slučajne promjenljive X

Prvi izvod funkcije, kao što je poznato, definiše nagib funkcije u nekoj tački. U izrazu u jed. (2.43) $\frac{dy}{dX} = 0$, u slučaju da je $y = 0$ ili $X = 0$, znači da je kriva gustoće simetriča u odnosu na y osu i asimptotski se približava X osi kada $y \to 0$.

Drugi izvod funkcije označava promjenu nagiba funkcije u nekoj tački, odnosno određuje prevojne tačke, koje se određuju izjednačavanjem drugog izvoda funkcije s nulom. Izjednačavanjem izraza u jednačini (2.44) s nulom dobije se da su prevojne tačke funkcije u $X = \pm\sigma$.

Za $e^0 = 1$ i $X = \mu = 0$ na osnovu izraza u jednačini (2.40) dobije se:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{2.47}$$

koja definiše centralnu ordinatu krive, inverzno proporcionalnu od σ. Na osnovu jed. (2.47) dolazi se do zaključka da mjerenja s manjim σ imaju veće centralne ordinate. Tada je pojava grešaka s manjim intenzitetom veća, pa su mjerenja preciznija. Prema tome, preciznost mjerenja je u direktnoj vezi s veličinom parametra σ i zbog toga se koristi kao mjera preciznosti skupa mjerenja.

Normalna raspodjela ima veoma važnu karakteristiku da se pod određenim uslovima zbir velikog broja promjenljivih ponaša po pravilima normalnog rasporeda. Ova karakteristika proizilazi iz prije spomenute centralne granične teoreme.

Ako je X slučajna promjenljiva normalne raspodjele sa srednjom vrijednošću μ_X i varijancom σ_X^2 može se definisati ekvivalentna promjenljiva normalne raspodjele oblika:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{2.48}$$

Uvođenjem Z u jed. (2.40) gdje je $\mu_X = 0$ i $\sigma_X = 1$ dobije se funkcija gustoće standardizirane slučajne promjenljive:

$$f(X; 0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}} \tag{2.49}$$

Funkcija raspodjele poznata je kao funkcija kumulativnog rasporeda standardizovane slučajne promjenljive:

$$F(X; 0,1) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}} \, dZ \tag{2.50}$$

Za bilo koji skup mjerenja koji pripada normalnoj raspodjeli, vjerovatnoća pojave slučajne promjenljive računa se rješavanjem integracijom funkcije gustoće raspodjele. Vjerovatnoća da slučajna promjenljiva Z manja od neke vrijednosti X računa se:

$$P(Z < X) = F(X; 0,1) \tag{2.51}$$

Površina ispod krive koja daje vjerovatnoću da je vrijednost X između a i b određuje se:

$$P(a < Z < b) = F(b) - F(a) \tag{2.52}$$

Ukoliko su granice istog intenziteta, a suprotnog predznaka $(-a = b = t)$ vjerovatnoća se računa kao:

$$P(|Z| < t) = F(t) - F(-t) \tag{2.53}$$

S obzirom na simetričnost normalne raspodjele može se pisati da je:

$$P(Z > t) = P(Z < -t)\text{za} \quad \forall\, t > 0 \tag{2.54}$$

Kako je ukupna vjeerovatnoća jednaka 1, važi da je:

$$1 - F(t) = F(-t) \tag{2.55}$$

Ako uvedemo smjenu u jednačini (2.53) jednačinom (2.55) dobije se da je:

$$P(|Z| < t) = 2F(t) - 1 \tag{2.56}$$

2.6 Procjena parametara raspodjele

Izvođenje zaključaka o parametrima raspodjele vjerovatnoće na osnovu statističkog uzorka naziva se procjenjivanjem. Statistika uzorka koji se koristi za procjenjivanje naziva se procjeniteljem, sračunati rezultat naziva se procjenom ili preciznije tačkastom procjenom. Primjeri procjena su srednja vrijednost uzorka $\overline{X}$, varijanca uzorka s_X^2, kovarijanca uzorka s_{XY} i dr. Oni predstavljaju procjenitelje parametara rasporeda $\mu, \sigma_X^2, \sigma_{XY}$, respektivno. Sa stanovišta statistika sve izvedene vrijednosti iz opažanja predstavljaju procjene odgovarajućih parametara rasporeda. S obzirom da se procjene mogu dobiti na više različitih načina neophodno je uvesti odgovarajuće kriterije.

Najvažnija četri kriterija su:

- konzistentnost,
- nepomjerenost,
- minimalna varijanca,
- efikasnost i dovoljnost

2.6.1 Kriteriji izbora procjenitelja

Za procjenitelja kaže se da je konzistentan ukoliko vjerovatnoća da će procjenitelj $\hat{p}$ težiti parametru p, kada $n \to \infty$ konvergira ka 1, odnosno matematički zapisano slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{p} - p| < \varepsilon) = 1 \tag{2.57}$$

Za procjenitelja kažemo da u vjerovatnoći konvergira ka svom parametru.

Konzistentnost kao osobina koja se veže za granični slučaj kada $n \to \infty$, skoro pa ništa ne govori kada je riječ o uzorcima malih dimenzija. Od procjenitelja se očekuje da obezbijedi nepomjerenu procjenu. Ovo znači da znači da očekivana vrijednost statistike uzorka treba biti identična svom parametru p za bilo koje n ili kao u izrazu:

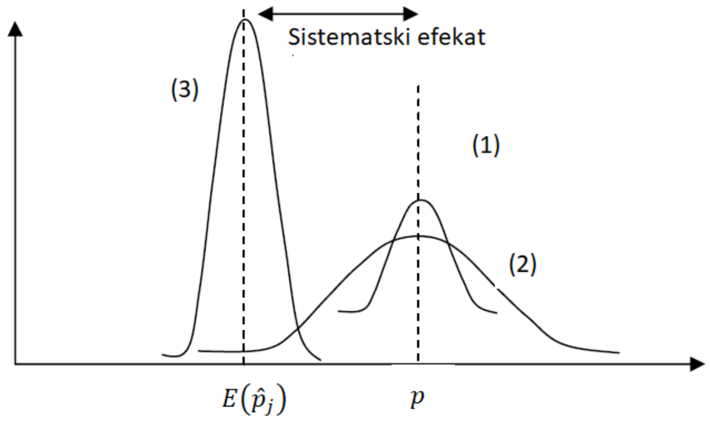
$$E(\hat{p}) = p \tag{2.58}$$

Ako izraz u jed. (2.58) vrijedi samo u slučaju kada $n \to \infty$ kaže se da je procjenitelj asimptotski nepomjeren.

Dati su prikazi (Slika 2-5) tri različita procjenitelja od p. Prva dva su nepomjerena, dok je treći procjenitelj pomjeren. Sistematski uticaj (bias) označava razliku između parametra i očekivane vrijednosti procjenitelja. Definiše se kao $bias = E(\hat{p}) - p$ i naziva se još sistematski efekat ili sistematska greška. Povećanjem broja mjerenja ne otklanja se sistematski efekat.

Minimalna varijanca je sljedeći kriterij izbora procjenitelja. Može se vidjeti (Slika 2-5) da varijanca od $\hat{p}_1$ manja od procjene $\hat{p}_2$, dok je potpuno jasno da je od $\hat{p}_3$ najmanja. Kada bi imali samo kriterij najmanje varijance odabrali bi procjenu $\hat{p}_3$. Međutim, kako je procjena od $\hat{p}_3$ pomjerena, jasno je koliko je kriterij nepomjerenosti važan.

Važno je istaći da se ovom slikom ukazuje i na odnos tačnosti i preciznosti. Oblik funkcije (raširenost) rasporeda ukazuje na preciznost, pa se nameće zaključak da je $\hat{p}_2$najnepreciznija, a $\hat{p}_3$ najpreciznija procjena. S druge strane ako smo preciznost definisali kao bliskost procjene s istinitom vrijednosti, tada su $\hat{p}_1$ i $\hat{p}_2$ jednako tačne, ali nisu precizne kao $\hat{p}_3$. Stoga, nameće se zaključak da je $\hat{p}_3$ najpreciznija i najmanje tačna. Dakle, razlika između tačnosti i preciznosti je u eventualnom prisistvu sistematskog efekta.



Slika 2-5: Pomjereni procjenitelj

Nepomjereni procjenitelj koji zadovoljava kriterij minimalne varijance i naziva se još i efikasnim procjeniteljem. Tako, ukoliko varijanca od $\hat{p}_1$ manja nego varijanca $\hat{p}_2$, a p_1 i p_2 su procjenitelji od p, tada je procjena $\hat{p}_1$ je efikasnija, a efikasnost procjene $\hat{p}_2$ iznosi $s^2_{\hat{p}_1}/s^2_{\hat{p}_2}$. Za procjenitelja se kaže da je dovoljan ako uključuje sve raspoložive informacije parametru kojeg procjenjuje.

2.6.2 Metode procjene parametara

Za procjenu parametara postoji više metoda. Procjenjitelji koji imaju sve četiri navedene karakteristike nazivaju se najboljim procjeniteljima. Neki od kriterija po prirodi su asimptotski, pa se za njih kaže da su procjenitelji s asimptoskim normalnim rasporedom kada $n \to \infty$.

U praktičnim primjerima statističkog procjenjivanja iz uzorka da bi se odabrao najbolja metoda nije nužno provjeravati zadovoljavanje navedenih kriterija. Za pojedine metode je poznato koje kriterije ispunjavaju.

Najčešće se koriste:

- Metoda momenata
- Metoda maksmalne vjerodostojnosti
- Metoda najmanjih kvadrata.

Kod metode momenata k – ti moment uzorka oblika:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum X_i^k \tag{2.59}$$

Definiše procjenu k – tog momenta vjerovatnoća. Jedan od primjera je srednja vrijednost. Ako primijenimo jednačinu (2.59) na centralni moment drugog reda, dobije se asimptotski nepomjereni procjenitelji za varijancu i kovarijancu.

Metoda maksimalne vjerodostojnosti koristi se u statistici. Prilikom procjene parametara, ova metoda obezbjeđuje maksimalnu vjerovatnoću. Ako su slučajne promjenljive X_i nezavisne i iste raspodjele tada vektor uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ima zajedničku funkciju gustoće oblika:

$$L(X_1, \dots, X_n; p_1, \dots, p_m) = \prod_n f(X_i; p_1, \dots, p_m) \qquad (2.60)$$

koja se naziva funkcijom vjerovatnoće. Gustoća $f(X_i)$ su funkcije nepoznatih parametara $p_1, \dots, p_m$ koji su s vrijednostima iz uzorka povezani s $p_i = g(X_1, \dots, X_m)$. Procjene $\hat{p}_i$ od p_i dobiju se maksimiziranjem funkcije L. Maksimiziranje se obezbjeđuje uz uslove:

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad \text{ili} \frac{\partial lnL}{\partial p} = 0 \qquad (2.61)$$

Rješavanjem ovi jednačina dobiju se procjenitelji parametara p_i koje nazivamo procjeniteljima maksimalne vjerodostojnosti. Veoma važna osobina ove metode je obavezno poznavanje funkcije raspodjele slučajne promjenljive.

2.6.3 Metoda najmanjih kvadrata

Metoda najmanjih kvadrata više od 200 godina koristi se u mnogim naukama. Da bi predstavili princip najmanjih kvadrata počećemo od specijalnog slučaja. Neka imamo n nezavisnih mjerenja iste tačnosti $z_1, z_2, \dots, z_n$ neke veličine z čiju najvjerovatniju vrijednost označimo sa Z. Po definiciji je:

$$\begin{gathered} Z - z_1 = v_1 \\ Z - z_2 = v_2 \\ \vdots \\ Z - z_n = v_n \end{gathered} \qquad (2.62)$$

gdje su v odgovarajuće popravke. Za popravke možemo reći da se ponašaju slično greškama. Pa prema tome, u funkciji normalne raspodjele greške mogu biti zamijenjene poravkama, pa dobije se sljedeći izraz:

$$f(v) = y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} = Ke^{-h^2v^2} \qquad (2.63)$$

uvođenjem smjene za:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \tag{2.64}$$

i

$$K = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \tag{2.65}$$

Kako je ranije istaknuto vjerovatnoća predstavlja površinu ispod krive normalne raspodjele. Pojedinačne vjerovatnoće pojave popravaka $v_1, v_2, \dots, v_n$ dobiju se množenjem odgovarajućih ordinata $y_1, y_2, \dots, y_n$ s infitenzimalnim inkrementom Δv, odnosno:

$$\begin{aligned} P_1 &= y_1\Delta v = Ke^{-h^2v_1^2}\Delta v \\ P_1 &= y_2\Delta v = Ke^{-h^2v_2^2}\Delta v \\ &\vdots \\ P_1 &= y_n\Delta v = Ke^{-h^2v_n^2}\Delta v \end{aligned} \tag{2.66}$$

Vjerovatnoća simultane pojave svih popravaka od v_1 do v_n dobije se kao proizvod pojedinačnih vjerovatnoća:

$$P = \left(Ke^{-h^2v_1^2}\Delta v\right)\left(Ke^{-h^2v_2^2}\Delta v\right)\left(Ke^{-h^2v_n^2}\Delta v\right) \tag{2.67}$$

ili

$$P = K^n(\Delta v)^n e^{-h^2\left(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2\right)} \tag{2.68}$$

Z je veličina kojoj odgovara najveća verovatnoća pojavljivanja, odnosno Z odgovara maksimalnoj vrijednosti verovatnoće. Za funkciju e^{-x} maksimum je pri minimalnom x, pa prema tome vjerovatnoća je maksimalna kada je suma kvadrata popravaka $(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$ minimalna, matematički napisan izraz je:

$$\sum v^2 = (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) = min \tag{2.69}$$

Uslov glasi: Najverovatnija vrijednost veličine (NVV) dobijena ponavljanjem mjerenja iste tačnosti je vrijednost ostvarena uz uslov da suma kvadrata popravaka bude minimalna.

Minimalna vrijednost funkcije dobije se izjadnačavanjem prvog izvoda funkcije po promenljivima s nulom.

U ovom slučaju, uslov u jednačini (uslov minimuma) ostvaruje se upravo izjednačavanjem prvog izvoda funkcije u odnosu na nepoznatu promenljivu Z i izjednačavanjem dobijenog rezultata sa nulom. Zamjenom sa jed. (2.62) u jed. (2.69) dobija se:

$$\sum v^2 = (Z - z_1)^2 + (Z - z_2)^2 + \cdots + (Z - z_n)^2 \tag{2.70}$$

Nalaženjem prvog izvoda jed. (2.70) po Z i izjednačavanjem rezulta s nulom dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{d(\sum v^2)}{dZ} = 2(Z - z_1) + 2(Z - z_2) + \cdots + 2(Z - z_n) = 0 \tag{2.71}$$

Podjelom gornje jed. (2.71) sa dva i preuređenjem članova dobije se:

$$Z - z_1 + Z - z_2 + \cdots + Z - z_1 = 0 \tag{2.72}$$

$$nZ = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

$$Z = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}$$

U izrazu (2.72) veliina Z predstavlja srednju vrijednost (sredina) rezultata opažanja iste veličine.

Za razliku od mjerenja iste tačnosti, opšti slučaj izravnanja po metodi najmanjih kvadrata podrazumjeva mjerenja različitim stepenom preciznosti, pa prema tome i različitim težinama.

Razmotrimo skup mjerenja $z_1, z_2, \dots, z_n$ relativnih težina $p_1, p_2, \dots, p_n$ i popravaka $v_1, v_2, \dots, v_n$. Neka je najvjerovatnija vrijednost mjerenja Z. Popravke i mjerenja vezane su jednačinom (2.62), a ukupna vjerovatnoća simultirane pojave popravaka data je jednačinom (2.63). Polazeći od jednačine (2.64) u kojoj se tvrdi da je $h^2 = 1/2\sigma^2$ i s obzirom da su težine obrnuto proporcionalne varijancama, dolazi se do zaključka da su težine direktno proporcionalne s h^2. Prema tome, jednačina (---) može biti napisana sljedećim izrazom:

$$P = K^n (\Delta v)^n e^{-(p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2)} \tag{2.73}$$

Maksimiziranje P u jednačini (2.73) podrazumjeva minimiziranje eksponenta, tj. proizvod popravaka i njihovih težina mora biti minimalan. Uslov koji se uvodi kod primjene principa izravnanja po metodi najmanjih kvadrata za mjerenja različite tačnosti ima sljedeći oblik:

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 = \sum pv^2 = min \tag{2.74}$$

Zamjenom vrijednosti reziduala iz jed. (2.62) u jed. (2.74) dobije se uslov:

$$p_1(Z - z_1)^2 + p_2(Z - z_2)^2 + \cdots + p_n(Z - z_n)^2 = min \tag{2.75}$$

Interprepretacija ovog uslova je sljedeća: najvjerovatnija vrijednost neke veličine izvedena ponavlhjanjem mjerenja različite tačnosti je vrijednost dobijena iz uslova da suma proizvoda težina mjerenja i kvadrata njihovih popravaka bude minimalna.

Minimiziranje jednačine (2.75) izvodi se izjednačavanjem izvoda funkcije (2.76) po argumentu Z s nulom:

$$2p_1(Z - z_1) + 2p_2(Z - z_2) + \cdots + 2p_n(Z - z_n) = 0 \tag{2.76}$$

Dijeljenjm izraza u jednačini (2.76) i nakon sređivanja dobije se:

$$p_1(Z - z_1) + p_2(Z - z_2) + \cdots + p_n(Z - z_n) = 0 \tag{2.77}$$

$$p_1(Z - z_1) + p_2(Z - z_2) + \cdots + p_n(Z - z_n) = 0$$

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_n z_n = p_1 Z + p_2 Z + \cdots + p_n Z$$

odnosno,

$$\sum pz = \sum pZ \tag{2.78}$$

Odakle slijedi da je:

$$Z = \frac{\sum pz}{\sum p} \tag{2.79}$$

što predtstvlja izraz za opću aritmetičku sredinu.

Važno je istaći, da primjena principa najmanjih kvadrata ne zahtijeva prethodno poznavanje raspodjele opažanja.

2.7 Zakon o prirastu grešaka

Kako je već više puta ranije rečeno direktna i indirektna mjerenja su funkcionalno zavisna, a njihova zavisnost definiše se matematičkim modelom. Primjeri indirektnih mjerenja su brojni, npr. koordinate tačaka dobiju se iz mjerenih dužina i pravaca, visine tačaka dobiju se iz čitanja na letvama u postupku geometrijskog nivelmana i sl. S obzirom da direktna mjerenja neizbježno sadrže greške, sve vrijednosti koje iz njih proisteknu, također su opterećena greškama. Pojava prenosa grešaka s direktnih na indirektne veličine u toriji grešaka naziva se prostiranjem, prenošenjem ili prenosom grešaka.

Prilikom daljnjeg razmatranja problema imat će se u vidu da su sistematske greške eliminisane. Da bi se izvela osnovna jednačina prenosa grešaka uzet će se u obzir sljedeća funkcija jednostavnog oblika $z = a_1 x_1 + a_2 x_2$, gdje su x_1 i x_2 dvije nezavisno opažane veličine sa standardnim greškama σ_1 i σ_2, dok su a_1 i a_2 konstante.

S obziro da su su x_1 i x_2 dva nezavisna opažanja svako od njih posjeduje različitu funkciju gustina vjerovatnoća. Neka greške pri n opažanja x_1 iznose $\varepsilon_1^i, \varepsilon_1^{ii}, \dots, \varepsilon_1^n$, a greške n realizacija x_2 neka iznose $\varepsilon_2^i, \varepsilon_2^{ii}, \dots, \varepsilon_2^n$, a neka je z_T tačna vrijednost od z. Tada je:

$$\begin{gathered} z_T = a_1\left(x_1^i - \varepsilon_1^i\right) + a_2\left(x_2^i - \varepsilon_2^i\right) = a_1 x_1^i + a_2 x_2^i - \left(a_1 \varepsilon_1^i + a_2 \varepsilon_2^i\right) \\ z_T = a_1\left(x_1^{ii} - \varepsilon_1^{ii}\right) + a_2\left(x_2^{ii} - \varepsilon_2^{ii}\right) = a_1 x_1^{ii} + a_2 x_2^{ii} - \left(a_1 \varepsilon_1^{ii} + a_2 \varepsilon_2^{i} \right. \\ \vdots \\ z_T = a_1(x_1^n - \varepsilon_1^n) + a_2(x_2^n - \varepsilon_2^n) = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n - (a_1 \varepsilon_1^n + a_2 \varepsilon_2^n \end{gathered} \tag{2.80}$$

Na osnovu gornje jed. (2.80) vrijednosti z iznose:

$$\begin{gathered} z^i = a_1 x_1^i + a_2 x_2^i \\ z^{ii} = a_1 x_1^{ii} + a_2 x_2^{ii} \\ \vdots \\ z^n = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n \end{gathered} \tag{2.81}$$

Zamjenom izrazom (2.81) u jednačini i preuređenjem dobije se izraz:

$$\begin{gathered} z^i - z_T = \left(a_1 \varepsilon_1^i + a_2 \varepsilon_2^i\right) \\ z^{ii} - z_T = \left(a_1 \varepsilon_1^{ii} + a_2 \varepsilon_2^{ii}\right) \\ \vdots \\ z^n - z_T = (a_1 \varepsilon_1^n + a_2 \varepsilon_2^n) \end{gathered} \tag{2.82}$$

Prema izrazu za varijancu populacije $n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2$, zbir kvadrata grešaka u izrazu (2.82)iznosi:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \left(a_1\varepsilon_1^i + a_2\varepsilon_2^i\right)^2 + \left(a_1\varepsilon_1^{ii} + a_2\varepsilon_2^{ii}\right)^2 + \cdots + (a_1\varepsilon_1^n + a_2\varepsilon_2^n)^2 \tag{2.83}$$

Preuređivanjem izraza (2.83) dobije se:

$$n\sigma_z^2 = \left(a_1\varepsilon_1^i\right)^2 + 2a_1\varepsilon_1^i a_2\varepsilon_2^i + \left(a_2\varepsilon_2^i\right)^2 + \left(a_1\varepsilon_1^{ii}\right)^2 + 2a_1\varepsilon_1^{ii} a_2\varepsilon_2^{ii} + \left(a_2\varepsilon_2^{ii}\right)^2 + \cdots \tag{2.84}$$

odnosno,

$$n\sigma_z^2 = a_1^2\left(\varepsilon_1^{i2} + \varepsilon_1^{ii2} + \cdots + \varepsilon_1^{n2}\right) + a_2^2\left(\varepsilon_2^{i2} + \varepsilon_2^{ii2} + \cdots + \varepsilon_2^{n2}\right) + 2a_1a_2\left(\varepsilon_1^i\varepsilon_2^i + \varepsilon_1^{ii}\varepsilon_2^{ii} + \cdots + \varepsilon_1^n\varepsilon_2^n\right) \tag{2.85}$$

Unošenjem simbola u izraz dobije se:

$$\sigma_z^2 = a_1^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_1^2}{n}\right) + 2a_1a_2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_1\varepsilon_2}{n}\right) + a_2^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_2^2}{n}\right) \tag{2.86}$$

Ako u zagradi izvršimo zamjene s ranije definisanim veličinama $\sigma_{x_1}^2$, $\sigma_{x_1x_2}$ i $\sigma_{x_2}^2$ izraz u jednačini (2.86) prelazi:

$$\sigma_z^2 = a_1^2\sigma_{x_1}^2 + 2a_1a_2\sigma_{x_1x_2} + a_2^2\sigma_{x_2}^2 \tag{2.87}$$

Izraz u jednačini (2.87) može se napisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

gdje je $\mathbf{\Sigma}_{zz}$ varijanc kovarijanc matrica funkcije z.

Prema tome, u skladu s izvedenim izrazima slijedi da u slučaju da z funkcija ima n promjenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi sljedeći izraz:

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \vdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \vdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \sigma_{x_1n} & \sigma_{x_2x_1} & \ldots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

U slučaju da imamo m funkcija sa n mjerenja imamo sljedeći izraz:

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \vdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \vdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{x_mx_1} & \sigma_{x_mx_2} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

Ako je funkcija nelinearna, linearizira se razvojem u Tajlorov red zaključno s prvim redom. Oznake $a_{11}, a_{12}, \dots$ zamjenjuju se parcijalnim izvodima funkcija $z_1, z_2, \dots z_m$ po mjerenjima $x_1, x_2, \dots x_m$ pa izraz varijanc kovarijanc matrice poprima izraz:

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \vdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \vdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{x_mx_1} & \sigma_{x_mx_2} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

Izrazi u jednačinama (2.90) i (2.91) poznati su kao opšti zakon prenosa varijance za linearne i nelinearne jednačine, respektivno i simbolički može se pisati kao:

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \boldsymbol{A}^T \mathbf{\Sigma}_l \boldsymbol{A} \tag{2.92}$$

gdje je Σ_l varijanc matrica mjerenih veličina. U slučaju da se radi o nelinearnim jednačinama, matrica $\boldsymbol{A}$ dobije se njihovom linearizacijom, a u literaturi često se naziva Jakobijan matrica.

Ukoliko su mjerenja $x_1, x_2, \dots x_m$ međusobno nezavisna tada su nedijagonalni elementi matrice Σ_l u izrazima (2.90) i (2.91) jednaki nuli pa poprimaju sljedeći oblik:

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

i

$$\mathbf{\Sigma}_{zz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

Ukoliko se radi o samo jenoj funkciji z s nezavisnim mjerenjima $x_1, x_2, \dots x_m$ tada izraz (2.94) ima oblik:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\sigma_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\sigma_{x_n}\right)^2} \tag{2.95}$$

Jednačine (2.93), (2.94) i (2.95) jednim imenom se nazivaju specijalni zakon prenosa varijance. Na osnovu prikazanih izraza može se vidjeti na koji način se greške statistički nezavisnih mjerenja prenose kroz funkciju. U navedenim jednačinama, pojedini članovi $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\sigma_{x_1}$ prezentiraju pojedinačni doprinos ukupnoj grešci koja nastaje kao posljedica grešaka mjerenja. Ukoliko je ukupna greška značajna, uvidom u pojedinačne doprinose otkrivaju se dominatni uticaji, na osnovu čega se pravi optimalan plan opažanja kako bi se tim mjerenjima dao odgovarajući značaj.

3 Gauss–Markov model izravnanja

Za uspješno provođenje procesa računanja usvojeno je nekoliko različitih funkcionalnih modela za jednačine opažanja, koje povezuju opažanja sa nepoznatim parametrima. Najpopularniji i najčešće korišteni je parametarski model izravnanja (Bähr i dr., 2007). Ovaj model je prikladan u svim slučajevima ako se svako mjerenje može izraziti kao funkcija nepoznatih i nezavisnih parametara.Kao rezultat parametarskog izravnanja dobiju se vrijednosti nepoznatih parametara. Međutim, ovaj model izravnanja također provodi statističku obradu i računa parametre koji definišu kvalitet, kako nepoznatih, tj. traženih parameta, tako i mjerenih veličina. Parametarski model je zbog svoje uniformnosti jednostavan za programiranje. Parametarski model procjene je dobro poznat i opšti alat u geodeziji, te se u ovom radu neće dati iscrpan prikaz, nego samo kratak pregled.

Svaki element n-dimenzonalnog vektora opažanja izražen je kao funkcija u-dimenzionalog vektora traženih parametara. Skup n diferencijabilnih funkcija $f(\boldsymbol{X})$ u parametara $\boldsymbol{X}$ koji se procjenjuju razvijese u Taylorov red u okolini tačke $\boldsymbol{X}_0$ (Bähr i dr., 2007).

$$f(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X}_0) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) + \mathrm{O}\{(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0)^2\} \tag{3.1}$$

S vrijednostima opažanja $\boldsymbol{L}$, vrijednostima funkcije $f(\boldsymbol{X})$ i izostavljanjem izraza drugog reda, jednačina opažanja za izravnanje u Gauss – Markovom modelu može biti napisana sljedećim izrazom:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.2}$$

sa:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0) \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}$$

gdje je:

$\boldsymbol{l}$– vektor $n \times 1$ skraćenih opažanja,

$\boldsymbol{x}$ – vektor $u \times 1$ skraćenih parametara,

$\boldsymbol{A}$ - $n \times u$ dizajn matrica,

$\boldsymbol{\epsilon}$ - $n \times 1$ vektor grešaka.

Ako se uvedu operatori za matematičko očekivanje $\left(\mathrm{E}(\cdot)\right)$ i disperziju $\left(\mathrm{D}(\cdot)\right)$ funkcionalni i stohastički model opažanja se može dati sljedećim izrazima:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.4}$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{C}_{ll} \tag{3.5}$$

gdje je $n \times n$ kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{C}_{ll}$.Uvođenjem predviđenih grešaka $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, $n \times 1$ vektor popravaka dat je sljedećim izrazom:

$$\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{3.6}$$

Uvodi se pozitivno definitna matrica težina $\boldsymbol{P}$ za koju obično vrijedi $\boldsymbol{P} \propto \boldsymbol{C}_{ll}^{-1}$. Ako se primijeni uslov najmanjih kvadrata, tj. matematički izraz u kojem je suma kvadrata popravaka pomnožena odgovarajućim težinama minimizirana:

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \to min \tag{3.7}$$

sistem normalnih jednačina može biti izveden u sljedećem obliku:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{n}$$

Uvedene su oznake za matrice normalnih jednačina, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ i na desnoj strani vektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}$. Rješenje normalnih jednačina, pod uslovom, da je matrica regularna dato je izrazom:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{n} \tag{3.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{l}} - \boldsymbol{l} \tag{3.11}$$

gdje je:

$\hat{\boldsymbol{x}}$ - procijenjeni vektor nepoznatih parametara,

$\hat{\boldsymbol{l}}$ - procijenjeni vektor opažanja,

$\boldsymbol{v}$ - procijenjeni vektor popravaka.

Procjena najmanjih kvadrata je nepristrana, budući da vrijede sljedeći izrazi (Bähr i dr., 2007),:

$$\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \tag{3.12}$$
$$\mathrm{D}(\hat{\boldsymbol{l}}) = \boldsymbol{C}_{\hat{l}\hat{l}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{\hat{x}\hat{x}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{3.13}$$
$$\mathrm{D}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{C}_{vv} = \boldsymbol{C}_{ll} - \boldsymbol{C}_{\hat{l}l} \tag{3.14}$$

gdje je:

$\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ – matrica kofaktora procijenjenih parametara,

$\boldsymbol{C}_{\hat{l}\hat{l}}$- kovarijanc matrica procijenjenog vektora opažanja,

$\boldsymbol{C}_{vv}$ - kovarijanc matrica procijenjenog vektora popravaka.

3.1 Procjena varijance jedinice težine – jediničnog varijanc faktora

Za daljna razmatranja u ovom radu veoma će važno biti dobro upoznat s konceptom jediničnog varijanc faktora i njegovom procjenom. Pristup ovom problemu sastoji se u proširenju stohastičkog modela (Bähr i dr.,2007)

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{C}_{ll} = \sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{ll} = \sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1} \tag{3.15}$$

Kovarijanc matrica opažanja $\mathbf{C}_{ll}$ rastavljena je na matricu kofaktora $\mathbf{Q}_{ll}$ i skalarni faktor σ_0^2, koji je nazvan varijanca jedinice težine – jedinični varijanc faktor ili a priori varijanc faktor.

Uvođenjem procjene varijanc faktora $\hat{\sigma}_0^2$, kovarijanc matrice za vektore $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\mathbf{l}}$ i $\boldsymbol{v}$ mogu takođe biti rastavljene, kao što slijedi:

$$\boldsymbol{C}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \tag{3.16}$$
$$\boldsymbol{C}_{\hat{l}\hat{l}} = \hat{\sigma}_0^2\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}} \tag{3.17}$$
$$\boldsymbol{C}_{vv} = \hat{\sigma}_0^2\boldsymbol{Q}_{vv} \tag{3.18}$$

Primjenom univerzalne formule za matematičko očekivanje kvadratne forme $y^T\mathrm{M}y$ (Koch K. R., 2004) možemo pisati sljedeće:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{tr}(D(\boldsymbol{y})\boldsymbol{M})\big) + \big(\mathrm{E}(\boldsymbol{y})\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\mathrm{E}(\boldsymbol{y}) \tag{3.19}$$

Nepristrana procjena $\hat{\sigma}_0^2$ varijance jedinice težine, takođe nazvana kaoa posteriori varijanc faktor, dobiven je računanjem sume kvadrata popravaka pomnoženih odgovarajućim težinama:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}\right) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_{vv}\boldsymbol{P}) \\ &= \sigma_0^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{vv}\boldsymbol{P}) \\ &= \sigma_0^2[\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{P}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}})] \\ &= \sigma_0^2(n-u)\end{aligned} \tag{3.20}$$

te se dolazi do izraza za jedinični varijanc faktor:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}}{(n-u)} \tag{3.21}$$

Iz jednačine (3.21) je jasno da je procjena varijanc faktora $\hat{\sigma}_0^2$ nepristrana procjena. Uvedena je prekobrojnost r, koja je ekvivalentna broju stupnjeva slobode u problemu izravnanja:

$$r = n - u = \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{vv}\boldsymbol{P}) \tag{3.22}$$

U predstojećim razmatranjima veoma je važno da prekobrojnost r može biti podijeljena u brojeve prekobrojnosti:

$$r_i = n - u = [\boldsymbol{Q}_{vv}\boldsymbol{P}]_{ii} \quad za\ \forall\ i = 1 \ldots n \tag{3.23}$$

gdje $[\cdot]$ označava i - ti element glavne dijagonale. Svaki broj prekobrojnosti odgovara pojedinačnom opažanju. Njegova suma je:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = r \tag{3.24}$$

4 Vektor mjerenja u prostornoj geodetskoj mreži

Klasična mjerenja u geodetskim mrežama su horizontalni pravci, dužine, zenitne udaljenosti, visinske razlike, koordinatne razlike i mjerenja udaljenosti između tačaka pomoću satelitskih metoda.

4.1 Jednačine popravaka

Jednačine popravaka predstavljaju funkcionalnu vezu između mjerenih veličina i traženih veličina (parametara), kojima se definiše funkcionalni model. Definitivne vrijednosti opažanja $\widehat{L}_i$ lahko je napisati kao funkciju približnih vrijednosti nepoznatih parametara i njihovih popravaka.

Jednačine se pišu kao što slijedi (Lother & Strehle, 2007):

$$\widehat{L}_i = L_i + v_i = F(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, \dots, t_0 + \delta t) \tag{4.1}$$

i

$$\hat{x} = x_0 + \delta x, \hat{y} = y_0 + \delta y, \dots, \hat{t} = t_0 + \delta t \tag{4.2}$$

gdje je:

$x_0, y_0, \dots, t_0$ - približne vrijednosti nepoznatih,

$\delta x, \delta y, \dots, \delta t$ - popravke približnih vrijednosti nepoznatih i

$\hat{x}, \hat{y}, \dots, \hat{t}$ - definitivne vrijednosti nepoznatih veličina.

Za nelinearne jednačine, neophodna je linearizacija razvojem u Taylorov red (Lother & Strehle, 2007) kako je to navedeno u jednačini (3.1), pa se može pisati:

$$\widehat{L}_i = L_i + v_i = F(x_0, y_0, \dots, t_0) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \cdots + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t \tag{4.3}$$

Iz gornje jednačine jednostavno izvedemo opštu jednačinu popravaka:

$$v_i = F(x_0, y_0, \dots, t_0) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \cdots + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t - L_i \quad (4.4)$$

Iz opšte jednačine popravaka (4.4) izraze se koeficijenti jednačine popravaka:

$$a_i = \frac{\partial F_{i0}}{\partial x_0}, b_i = \frac{\partial F_{i0}}{\partial y_0}, \dots, u_i = \frac{\partial F_{i0}}{\partial t_0} F_i \quad (4.5)$$

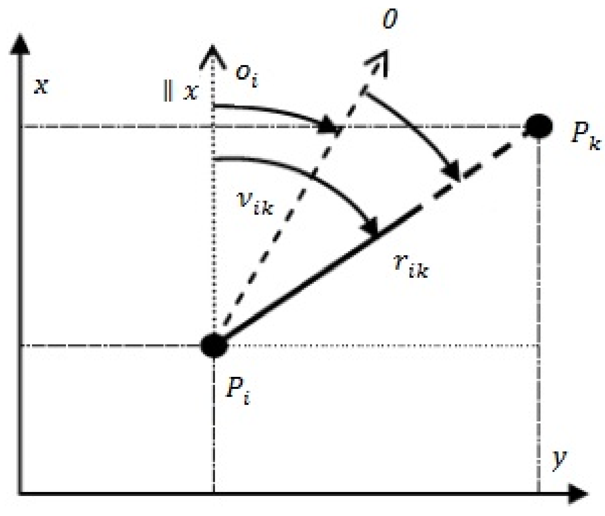
koji čine elemente dizajn matrice $\boldsymbol{A}$, a

$$l_i = F_i(x_0, y_0, \dots, t_0) - L_i \quad (4.6)$$

su elementi vektora$\boldsymbol{l}$ slobodnih članova.

4.1.1 Jednačina popravaka horizontalnog pravca

Horizontalni pravac između dvije tačke P_i i $P_k$je čitanje na horizontalnom krugu (limbu) teodolita. Redukovani horizontalni pravac je horizontalni ugao koji zaklapa početni pravac i pravac prema odabranoj tački. Da bise mjerenje povezalo s nepoznatim parametrima, mora se redukovani pravac odgovarajuće orijentirati. Mora se odnositi na početni pravac, koji je paralelan pozitivnom kraku x osi, u kojem se izražavaju nepoznati parametri, najčešće koordinate tačaka. Redukovanom pravcu dodase orijentisani ugaoo_i – to je ugao, što predstavlja ugao koji početni pravac zaklapa s pravcem pozitivnog kraka x osi.



Slika 4-1: Mjerenje horizontalnog pravca (prema (Lother & Strehle, 2007))

Funkcionalna veza (Slika 4-1) opažanog horizontalnog pravca r_{ik} i nepoznatih parametara koordinata tačaka $P_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ i $P_k(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$ je data sljedećom relacijom (Lother & Strehle, 2007):

$$r_{ik} + v_{ik} = \nu_{ik} - o_i = \operatorname{arctg}\frac{\hat{y}_k - \hat{y}_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_i} - o_i \tag{4.7}$$

Razvojem u Taylorov red i zadržavanjem prvih članova, ako su dobro poznate približne vrijednosti nepoznatih parametara dobije se:

$$\begin{aligned} r_{ik} + v_{ik} = \operatorname{arctg}\frac{y_{k0} - y_{i0}}{x_{k0} - x_{i0}} - o_{i0} \\ + \frac{1}{1 + \left(\frac{y_{k0} - y_{i0}}{x_{k0} - x_{i0}}\right)^2}\Bigg[\frac{y_{k0} - y_{i0}}{(x_{k0} - x_{i0})^2}\delta x_i \\ + \frac{-(x_{k0} - x_{i0})}{(x_{k0} - x_{i0})^2}\delta y_i \\ + \frac{-(y_{k0} - y_{i0})}{(x_{k0} - x_{i0})^2}\delta x_k \\ + \frac{(x_{k0} - x_{i0})}{(x_{k0} - x_{i0})^2}\delta y_k\Bigg] - \delta o_i \end{aligned} \tag{4.8}$$

Jednačina se preoblikuje i dobit će se sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} v_{ik} = \operatorname{arctg}\frac{y_{k0} - y_{i0}}{x_{k0} - x_{i0}} - o_{i0} + \frac{y_{k0} - y_{i0}}{s_{ik0}^2}\delta x_i \\ + \frac{-(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}^2}\delta y_i \\ + \frac{-(y_{k0} - y_{i0})}{s_{ik0}^2}\delta x_k \\ + \frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}^2}\delta y_k - \delta o_i \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ako se označe članovi iz izraza (4.9) sa:

$$\nu_{ik0} = \operatorname{arctg}\frac{y_{k0} - y_{i0}}{x_{k0} - x_{i0}} - o_{i0},$$

$$\frac{\partial r_{ik0}}{\partial x_{i0}} = \frac{y_{k0} - y_{i0}}{s_{ik0}^2} = \frac{\sin \nu_{ik0}}{s_{ik0}} = a_{ik}, \qquad \frac{\partial r_{ik0}}{\partial x_{k0}} = -\frac{(y_{k0} - y_{i0})}{s_{ik0}^2} = -\frac{\sin \nu_{ik0}}{s_{ik0}} = a_{ki},$$

$$\frac{\partial r_{ik0}}{\partial y_{i0}} = -\frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}^2} = -\frac{\cos \nu_{ik0}}{s_{ik0}} = b_{ik}, \qquad \frac{\partial r_{ik0}}{\partial y_{k0}} = \frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}^2} = \frac{\cos \nu_{ik0}}{s_{ik0}} = b_{ki},$$

$$l_{ik} = \nu_{ik0} - o_{i0} - r_{ik}.$$

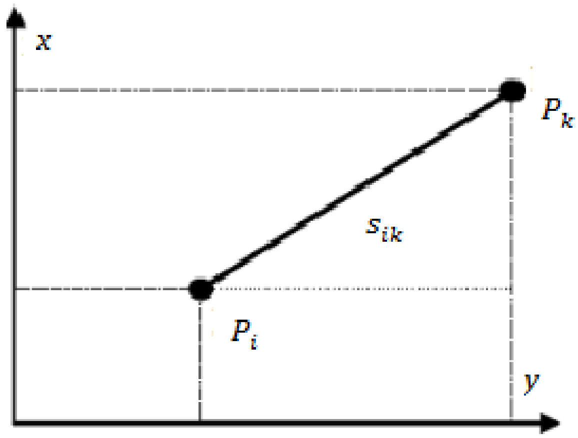
opšta jednačina popravaka opažanog horizontalnog pravca je:

$$v_{ik} = a_{ik}\delta x_i + b_{ik}\delta y_i + a_{ki}\delta x_k + b_{ki}\delta y_k - \delta o_i + l_{ik} \qquad (4.10)$$

4.1.2 Jednačina popravaka za horizontalne dužine

Udaljenost između tačke $P_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$i tačke $P_k(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$računa se pomoćuPitagorinog pravila iz pravouglih koordinata (Slika 4-2).

$$\hat{s}_{ik} = s_{ik} + v_{ik} = \sqrt{(\hat{y}_k - \hat{y}_i)^2 + (\hat{x}_k - \hat{x}_i)^2} \qquad (4.11)$$



Slika 4-2: Horizontalna dužina ((Lother & Strehle, 2007))

Kako je funkcionalna veza nelinearna, potrebno je izvršiti linearizaciju. Razvojem u Taylorov red, zadržavanjem prvih članova reda, uz dobro poznavanje približnih vrijednosti nepoznatih parametara dobije se izraz (Lother & Strehle, 2007):

$$\begin{aligned} s_{ik} + v_{ik} &= \sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}[-2(x_{k0} - x_{i0})\delta x_i \\ &- 2(y_{k0} - y_{i0})\delta y_i + 2(x_{k0} - x_{i0})\delta x_k \\ &+ 2(y_{k0} - y_{i0})\delta y_k] \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Preoblikovanjem gornje jednačine dobije se izraz:

$$v_{ik} = -\frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}}\delta x_i - \frac{(y_{k0} - y_{i0})}{s_{ik0}}\delta y_i + \frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}}\delta x_k + \frac{(y_{k0} - y_{i0})}{s_{ik0}}\delta y_k + s_{ik0} - s_{ik} \tag{4.13}$$

Ako članovi iz izraza (4.13) označekao što slijedi:

$$\frac{\partial s_{ik0}}{\partial x_{i0}} = -\frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}} = -\cos t_{ik} = a_{ik}, \qquad \frac{\partial s_{ik0}}{\partial x_{k0}} = \frac{(x_{k0} - x_{i0})}{s_{ik0}} = \cos t_{ik} = a_{ki}$$

$$\frac{\partial s_{ik0}}{\partial y_{i0}} = -\frac{(y_{k0} - y_{i0})}{s_{ik0}} = -\sin t_{ik} = b_{ik}, \qquad \frac{\partial s_{ik0}}{\partial y_{k0}} = \frac{(y_{k0} - y_{i0})}{s_{ik0}} = \sin t_{ik} = b_{ki},$$

$l_{ik} = s_{ik0} - s_{ik},$

opšta jednačina popravaka opažane horizontalne dužine je:

$$v_{ik} = a_{ik}\delta x_i + b_{ik}\delta y_i + a_{ki}\delta x_k + b_{ki}\delta y_k + l_{ik} \tag{4.14}$$

4.1.3 Jednačina popravaka za prostorne dužine

U izravnanju prostornih mreža koriste se jednačine popravaka za prostorne dužine. Kosa dužina u prostoru izračuna se iz tri koordinatne razlike, što znači da jednačina opažanja treba da sadrži i visinske koordinate.

Opažanu kosu dužinu između tačke $P_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \widehat{H}_i)$ i tačke $P_k(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \widehat{H}_k)$ redukuje se samo za meteorološke popravke.

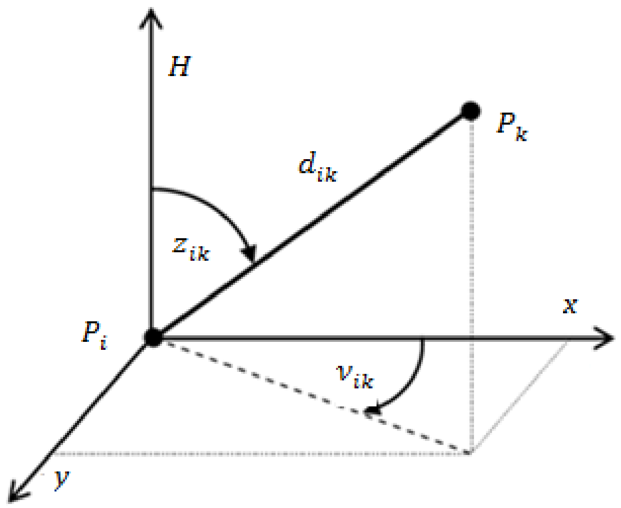
Funkcionalna veza opažane prostorne dužine (slika 3-3) nepoznatih parametara data je izrazom (Lother & Strehle, 2007):

$$\hat{d}_{ik} = d_{ik} + v_{ik} = \sqrt{(\hat{y}_k - \hat{y}_i)^2 + (\hat{x}_k - \hat{x}_i)^2 + \left(\widehat{H}_k - \widehat{H}_i\right)^2} \tag{4.15}$$

Funkcija je nelinearna, te je potrebno razvojem u Taylorov red izvršiti linearizaciju.

Ako su poznate približne vrijednosti, zadržavaju se prvi članovi Taylorovog reda, pa jednačina opažanja izgleda kao:

$$\begin{aligned} d_{ik} + v_{ik} &= \\ &= \sqrt{(y_{k0}-y_{i0})^2 + (x_{k0}-x_{i0})^2 + (H_{k0}-H_{i0})^2} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(y_{k0}-y_{i0})^2 + (x_{k0}-x_{i0})^2 + (H_{k0}-H_{i0})^2}}[-2(x_{k0} \\ &- x_{i0})\delta x_i - 2(y_{k0}-y_{i0})\delta y_i - 2(H_{k0}-H_{i0})\delta H_i \\ &+ 2(x_{k0}-x_{i0})\delta x_k + 2(y_{k0}-y_{i0})\delta y_k \\ &+ 2(H_{k0}-H_{i0})\delta H_i] \end{aligned} \tag{4.16}$$



Slika 4-3: Prostorna dužina (prema (Lother & Strehle, 2007))

Preoblikovanjem gornje jednačine dobijese izraz za jednačinu popravaka:

$$\begin{aligned} v_{ik} = -\frac{(x_{k0}-x_{i0})}{d_{ik0}}\delta x_i - \frac{(y_{k0}-y_{i0})}{d_{ik0}}\delta y_i \\ - \frac{(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik0}}\delta H_i + \frac{(x_{k0}-x_{i0})}{d_{ik0}}\delta x_k \\ + \frac{(y_{k0}-y_{i0})}{d_{ik0}}\delta y_k + \frac{(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik0}}\delta H_i \\ + d_{ik0} - d_{ik} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ako se članovi iz jednačine (4.17) označe kao:

$$\frac{\partial d_{ik0}}{\partial x_{i0}} = -\frac{(x_{k0}-x_{i0})}{d_{ik0}} = -\sin z_{ik}\cos v_{ik} = a_{ik}, \quad \frac{\partial d_{ik0}}{\partial x_{k0}} = \frac{(x_{k0}-x_{i0})}{d_{ik0}}$$
$$= \sin z_{ik}\cos v_{ik} = a_{ki}$$

$$\frac{\partial d_{ik0}}{\partial y_{i0}} = -\frac{(y_{k0} - y_{i0})}{d_{ik0}} = -\sin z_{ik} \sin v_{ik} = b_{ik}, \quad \frac{\partial d_{ik0}}{\partial y_{i0}} = \frac{(y_{k0} - y_{i0})}{d_{ik0}}$$
$$= \sin z_{ik} \sin v_{ik} = b_{ik}$$

$$\frac{\partial d_{ik0}}{\partial H_{i0}} = -\frac{(H_{k0} - H_{i0})}{d_{ik0}} = -\cos z_{ik} = c_{ik}, \quad \frac{\partial d_{ik0}}{\partial H_{k0}} = \frac{(H_{k0} - H_{i0})}{d_{ik0}} = \cos z_{ik}$$
$$= c_{ik}$$

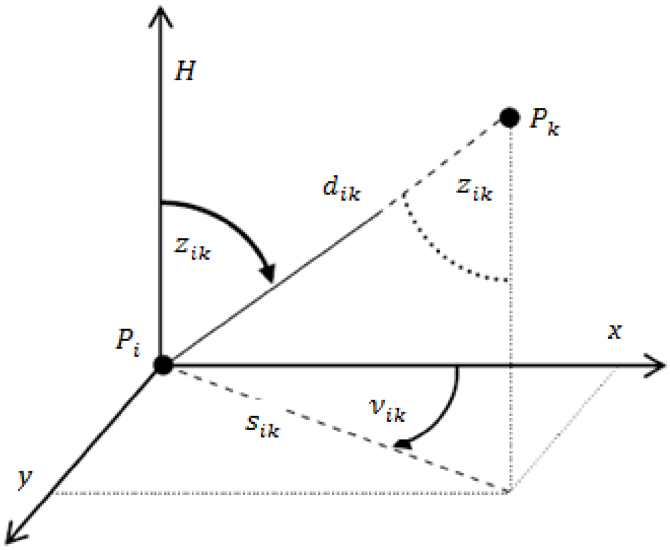
$l_{ik} = d_{ik0} - d_{ik},$

opšta jednačina popravaka opažane prostorne dužine je:

$$v_{ik} = a_{ik}\delta x_i + b_{ik}\delta y_i + a_{ki}\delta x_k + b_{ki}\delta y_k + c_{ik}\delta H_i + c_{ki}\delta H_k + l_{ik} \tag{4.18}$$

4.1.4 Jednačine popravaka zenitnih udaljenosti

Prilikom izravnanja prostornih mreža, pored horizontalnih pravaca i kosih dužina uključene su i zenitne udaljenosti. Funkcionalna (Slika 4-4) lahko se napiše na osnovu horizontalne ili prostorne dužine.



Slika 4-4: Zenitna udaljenost (prema (Lother & Strehle, 2007))

Funkcionalna veza (Lother & Strehle, 2007) opažane zenitne udaljenosti i traženih parametara data je izrazom:

$$\hat{z}_{ik} = z_{ik} + v_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(\hat{y}_k - \hat{y}_i)^2 + (\hat{x}_k - \hat{x}_i)^2}}{(\hat{H}_k - \hat{H}_i)} = \frac{s_{ik}}{(\hat{H}_k - \hat{H}_i)} \tag{4.19}$$

Nelinearna jednačina se razvije u Taylorov red i zadrže se prvi članovi uz poznavanje približnih vrijednosti nepoznatih parametara te se dobije izraz :

$$\begin{aligned} z_{ik} + v_{ik} = {} & \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}{(H_{k0} - H_{i0})} + \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}{(H_{k0} - H_{i0})} \right)^2} \\ & \left[\left(\frac{\frac{-2(x_{k0} - x_{i0})(H_{k0} - H_{i0})}{2\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}}{(H_{k0} - H_{i0})^2} \right) \delta x_i \right. \\ & + \left(\frac{\frac{-2(y_{k0} - y_{i0})(H_{k0} - H_{i0})}{2\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}}{(H_{k0} - H_{i0})^2} \right) \delta y_i \\ & + \left(\frac{\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}{(H_{k0} - H_{i0})^2} \right) \delta H_i \\ & + \left(\frac{\frac{2(x_{k0} - x_{i0})(H_{k0} - H_{i0})}{2\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}}{(H_{k0} - H_{i0})^2} \right) \delta x_k \\ & + \left(\frac{\frac{2(y_{k0} - y_{i0})(H_{k0} - H_{i0})}{2\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}}{(H_{k0} - H_{i0})^2} \right) \delta y_k \\ & \left. + \left(\frac{-\sqrt{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2}}{(H_{k0} - H_{i0})^2} \right) \delta H_k \right] \end{aligned} \tag{4.20}$$

Preoblikovanjem gornje jednačine dobije se sljedeći izraz za jednačinu popravaka za zenitne udaljenosti:

$$v_{ik} = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{(y_{k0}-y_{i0})^2+(x_{k0}-x_{i0})^2}}{(H_{k0}-H_{i0})} - \frac{(x_{k0}-x_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}}\delta x_i - \frac{(y_{k0}-y_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}}\delta y_i + \frac{s_{ik}}{d_{ik}^2}\delta H_i + \frac{(x_{k0}-x_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}}\delta x_k + \frac{(y_{k0}-y_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}}\delta y_k - \frac{s_{ik}}{d_{ik}^2}\delta H_k - z_{ik} \tag{4.21}$$

Ako se članovi označe sa:

$$\frac{\partial z_{ik0}}{\partial x_{i0}} = -\frac{(x_{k0}-x_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}} = \frac{-\cos z_{ik}\cos v_{ik}}{d_{ik}} = a_{ik}, \quad \frac{\partial z_{ik0}}{\partial x_{k0}} = \frac{(x_{k0}-x_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}} = \frac{\cos z_{ik}\cos v_{ik}}{d_{ik}} = a_{ki}$$

$$\frac{\partial z_{ik0}}{\partial y_{i0}} = -\frac{(y_{k0}-y_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}} = \frac{-\cos z_{ik}\sin v_{ik}}{d_{ik}} = b_{ik}, \quad \frac{\partial z_{ik0}}{\partial y_{i0}} = \frac{(y_{k0}-y_{i0})(H_{k0}-H_{i0})}{d_{ik}^2 s_{ik}} = \frac{\cos z_{ik}\sin v_{ik}}{d_{ik}} = b_{ki}$$

$$\frac{\partial z_{ik0}}{\partial H_{i0}} = \frac{s_{ik}}{d_{ik}^2} = \frac{\sin z_{ik}}{d_{ik}} = c_{ik}, \quad \frac{\partial z_{ik0}}{\partial H_{i0}} = -\frac{s_{ik}}{d_{ik}^2} = -\frac{\sin z_{ik}}{d_{ik}} = c_{ki},$$

$l_{ik} = z_{ik0} - z_{ik}.$

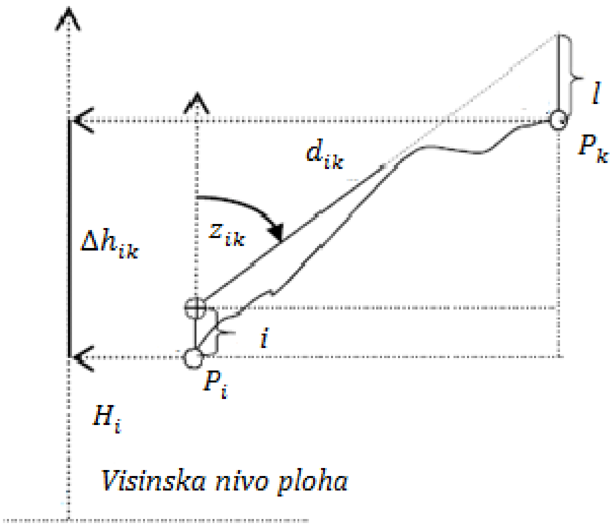
Na osnovu izloženog opšta jednačina popravaka za zenitne udaljenosti je:

$$v_{ik} = a_{ik}\delta x_i + b_{ik}\delta y_i + a_{ki}\delta x_k + b_{ki}\delta y_k + c_{ik}\delta H_i + c_{ki}\delta H_k + l_{ik} \tag{4.22}$$

4.1.5 Jednačina popravaka visinskih razlika

Mjerena veličina u trigonometrijskom nivelmanu je visinska razlikaΔh_{ik}, dobivena na osnovu mjerenja dužined_{ik} i zenitne udaljenostiz_{ik}. Proces izravnanja u trigonometrijskom nivelmanu je isti kao u geometrijskom nivelmanu, razlika je samo u određivanju težina. Računanje visinske razlikena osnovu rezultata mjerenja (Slika 4-5) izvodi se na osnovu izraza:

$$\Delta h_{ik} = d_{ik} \cos z_{ik} + i - l \tag{4.23}$$



Slika 4-5: Mjerenje visinske razlike trigonometrijskim nivelmanom (prema (Lother & Strehle, 2007))

Traženi nepoznati parametri su definitivne visine tačaka $\widehat{H}_1, \widehat{H}_2, \dots, \widehat{H}_u$.

Funkcionalna veza između mjerene visinske razlike Δh_{ik} i traženih parametara, definitivnih visina tačaka data je sa (Lother & Strehle, 2007):

$$\hat{h}_{ik} = \Delta h_{ik} + v_{ik} = \widehat{H}_k - \widehat{H}_i \tag{4.24}$$

Funkcionalna veza je linearna, te nije potreban razvoj u Taylor ov red. Jenačina popravaka za mjerenu visinsku razliku data je izrazom:

$$v_{ik} = -\delta H_i + \delta H_k + (H_{k0} - H_{i0}) - \Delta h_{ik} \tag{4.25}$$

Opšta jednačina popravaka za visinske razlike je:

$$v_{ik} = -\delta H_i + \delta H_k + l_{ik} \tag{4.26}$$

4.1.6 Jednačine popravaka koorinatnih razlikaΔx i Δy

Funkcionalna vezaizmeđu mjerenih koordinatnih razlika dy i dxi traženih parametara data je izrazom (Lother & Strehle, 2007):

$$\begin{aligned} \Delta\hat{y}_{ik} &= \Delta y_{ik} + v_{\Delta y_{ik}} = \hat{y}_k - \hat{y}_i \\ \Delta\hat{x}_{ik} &= \Delta x_{ik} + v_{\Delta x_{ik}} = \hat{x}_k - \hat{x}_i \end{aligned} \tag{4.27}$$

Funkcionalna veza je linearna, te u ovom slučaju nije potreban razvoj u Taylor - ov red.

Jenačina popravaka za dređivanje popravaka koordinatnih razlika dyi dx je:

$$v_{\Delta y_{ik}} = -\delta y_i + \delta y_k + (y_{k0} - y_{i0}) - \Delta y_{ik}$$
$$v_{\Delta x_{ik}} = -\delta x_i + \delta x_k + (x_{k0} - x_{i0}) - \Delta x_{ik} \quad (4.28)$$

Jenačina popravaka za mjerene koordinatne razlike dyi dx date su sljedećim izrazima:

$$v_{\Delta y_{ik}} = -\delta y_i + \delta y_k + l_{\Delta y_{ik}}$$
$$v_{\Delta x_{ik}} = -\delta x_i + \delta x_k + l_{\Delta x_{ik}} \quad (4.29)$$

4.2 Određivanje težina mjerenja

Vektor mjerenjaje heterogene prirode, tesu mjerenja različite tačnosti. Postavlja se pitanje: kako treba vrednovati tačnost izvršenog mjerenja da bi kvaliteta mjerenja na najbolji način bila predstavljena u izravnanju? Za skup nekoreliranih opažanja, mjerenja visoke tačnosti, iskazano malim vrijednostima varijance, podrazumijeva dobra opažanja, u izravnanju bi trebalo da dobiju relativno male korekcije. S druge strane, mjerenja niske preciznosti iskazane velikim varijancama, podrazumijeva opažanja sa značajnim greškama, pa stoga u izravnanju dobivaju veće popravke.

Težina opažanja je mjera njegove relativne vrijednosti u poređenju sa drugim mjerenjima. Težine se koriste da definišu značaj pojedinačnih mjerenja, od čega zavise veličine popravaka mjerenja prilikom izravnanja. Preciznija opžanja, veće težine; drugim riječima, manja varijanca, veća težina. Može se intuitivno reći da su težine obrnuto proporcionalne varijancama. Varijance mjerenih veličina dobijemo a priori ocjenom tačnosti (preciznosti) mjerenja, gdje varijanca predstavlja kvadrat standardnog odstupanja σ.

Težina mjerene veličine se može napisati kao odnos konstante i varijance (Ghilani & Wolf, 2006):

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}. \quad (4.30)$$

Težine mjerenja određuje se na više načina, ovisno o načinu određivanja standardnog odstupanja, a prema tome i varijance. Težine lahko određujemo na osnovu:

- prethodne ocjene mjerenja,
- preciznosti instrumentarija,
- modela predstavljanja mjernog postupka (npr., trigonometrijski nivelman: $1/S^2$, nivelman $1/S$ ...).

4.2.1 Tačnost (preciznost) uglovnih opažanja

Kod uglovnih opažanja ima više mogućnosti. Težine se odrede na osnovu analize ili ocjene tačnosti nakon izvršenih mjerenja, a može se odrediti i na osnovu deklarirane tačnosti instrumenta.

Ako se želi odrediti standardno odstupanje nakon mjerenja, a postoje prekobrojna mjerenja, može se koristiti nekoliko načina određivanja. Svaki od načina ima prednosti i nedostatke koje treba uzeti u obzir, prije donošenja odluke o izboru.

Poznati načini računanja standardnogodstupanja horizontalnog ugla su (Mihajlović, 1974):

- iz odstupanja od aritmetičke sredine δ

– ugao mjeren u jednom girusu:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta^{\mathrm{T}}\delta}{n-1}}. \tag{4.31}$$

– za ugao mjeren u n girusa:

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{4.32}$$

- iz grešaka zatvaranja horizonta f_H:

– ugao mjeren u jednom girusu:

$$\sigma = \frac{f_H}{\sqrt{S}} \tag{4.33}$$

– za ugao mjeren u n girusa:

$$\sigma_n = \sigma\sqrt{n}. \tag{4.34}$$

gdje je S broj uglova. Ovo odstupanje može se računati ako su uglovi mjereni po metodi zatvaranja horizonta.

- iz grešaka zatvaranja trougla f

Ako su uglovna odstupanja u trouglu f nezavisne veličine, za određivanje standardnog odstupanja koristi se Ferer - ova formula (Mihajlović & Aleksić, 2008):

$$\sigma = \sqrt{\frac{f^{\mathrm{T}}f}{3N}} \tag{4.35}$$

gdje je N broj trouglova.

4.2.2 Tačnost (preciznost) horizontalnih pravaca – girusna metoda – redukovani pravci

Standardno odstupanje pravaca mjerenih girusnom metodom može se odrediti nakon mjerenja na dva načina:

- Za svaku pojedinačnu stanicu, standardno odstupanje opažanog pravca računa se kao (Mihajlović, 1974):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}{(r-1)(n-1)}} \tag{4.36}$$

Gdje se$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$računa na sljedeći način:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = d^{\mathrm{T}}d - \frac{\sum_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} d_i^{\mathrm{T}} d}{r} \tag{4.37}$$

d_i - odstupanje redukovanih pravaca od aritmetičke sredine,

r - broj pravaca

n - broj girusa

Standardno odstupanje redukovanog pravca je:

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \sigma\sqrt{2} \tag{4.38}$$

- Za čitavu mrežu po Ferer - ovoj formuli, standardno odstupanje opažanih pravaca računa se kao:

$$\sigma = \sqrt{\frac{w^{\mathrm{T}}w}{6n}} \tag{4.39}$$

4.2.3 Tačnost (preciznost) dužinskih opažanja

Kako tačnost dužine zavisi od sistematskog i slučajnog uticaja, određivanje tačnosti zavisi o veličini dužine.

Jednačina za određivanje tačnosti mjerene dužinedata je sa (Kogoj, 2006):

$$\sigma^2 = \sigma_{[\mathrm{mm}]}^2 S + \sigma_{[\mathrm{pmm}]}^2 S^2 \qquad (4.40)$$

Koristeći predhodnu jednačinu ima više mogućnosti:

- sve dužine izmjerene istom tačnošću

Ovakva se situacija javlja u mrežama manjih dimenzija, gdje su dužine sličnih dimenzija, pa sve dužine imaju iste težine.

Usvoji se da je $k = \sigma$, pa iz toga slijedi, da je $p = 1$.

- kratke dužine geodetskih strana

Kad je mreža malih dimenzija, onda preovladavaju kratke dužine, te se pretpostavlja da dominira slučajni uticaj, dok sistematske greške imaju minimalan uticaj. Standardno odstupanje pojedinačne dužine se računa kao :

$$\sigma_i = \sigma_0 \sqrt{S_i} \qquad (4.41)$$

Ako se usvoji$k = \sigma_0^2$, slijedi da je $p_i = \frac{1}{S_i}$.

- duge dužine geodetskih strana

U slučaju dugih dužina preovladava sistematski uticaj, dok slučajne greške imaju veoma mali uticaj. Standardno odstupanje pojedinačne dužine računa se kao:

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 S^2 \qquad (4.42)$$

Ako se usvoji$k = \sigma_0^2$, slijedi da je $p_i = \frac{1}{S_i^2}$.

- različite dužine geodetskih strana

U ovom slučaju uzimaju se u obzir oba uticaja pa težina ima sljedeći izraz:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_{[\mathrm{mm}]}^2 + \sigma_{[\mathrm{ppm}]}^2 S_i^2} \qquad (4.43)$$

Tačnost impulsnog i faznog daljinomjera data je sa parametrima $\sigma_{[\mathrm{mm}]}$ i $\sigma_{[\mathrm{pmm}]}$. Navedeni parametri tačnosti instrumenta osnovni su podaci i osnovni su dio tehničkih podataka elektronskog daljinomjera. Vrijednosti $\sigma_{[\mathrm{mm}]}$ i $\sigma_{[pmm]}$ opisuju standardno odstupanje mjerene dužine, koji se odnosi na konstantni i multiplikacioni uticaj, respektivno.

4.2.4 Tačnost (preciznost) dužina određenih GNSS opažanjima

GNSS sistem funkcioniše na principu mjerenja dužina od prijemnika lociranih najčešće na Zemljinoj površi, čiji položaj nije poznat, do satelita čiji položaji u orbitama su određeni. Može se reći, da po svojoj prirodi, pozicioniranje uz pomoć GNSS sistema liči metodi 3D prostorne trilateracije. Ekvivalent GNSS tehnici bi bio uz pretpostavku da se u 3D trilateracijskoj mreži dužine mjere elekro-optičkim daljinomjerom (EOD) od nepoznate tačke do tačaka sa poznatim koordinatama. Naravno, postoje značajne razlike između GNSS pozicioniranja i klasičnog presjeka dužina. Glavne razlike su npr.: način opažanja dužina, koriste se satovi različite tačnosti na krajevima dužine, te činjenica da su kontrolne stanice, tj. tačke sa poznatim koordinatama, kod GNSS tehnike ustvari sateliti.

Rezultati mjerenja u GNSS mrežama su najčešće komponente vektora između stanica u geodetskoj mreži.Te komponente vektora se mogu izraziti preko koordinatnihrazlika.Za slučaj primjene relativne statičke metode satelitskog mjerenja, varijanc kovarijan matrica svakog baznog vektora je dimenzija 3x3.

Prostorna dužina dobivena iz određivanja komponenti baznog vektora data je sa $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Ocjenu tačnosti mjerenja ove dužine izvodi se primjenom zakona o prirastu varijance:

$$\sigma_{d_{\mathrm{GNSS}}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{d}\right)^2 \sigma_{\Delta x}^2 + \left(\frac{\Delta y}{d}\right)^2 \sigma_{\Delta y}^2 + \left(\frac{\Delta z}{d}\right)^2 \sigma_{\Delta z}^2} \tag{4.44}$$

4.2.5 Tačnost (preciznost) trigonometrijskog nivelmana

S obzirom da se težine određuju na osnovu tačnosti mjerenja, važno je znati ograničenja koja nameće metoda trigonometrijskog nivelmana. Određivanje tačnosti visinske razlike ovisna je o nekoliko faktora, od kojih je najvažnija dužina. Veću tačnost moguće je postići samo kada imamo kraće dužine. S povećanjem dužine tačnost određivanja visinske razlike naglo opada, u prvom redu zbog vertikalne refrakcije (Mihajlović, 1978).

Ovdje se razmatraju težine direktno mjerenih visinskih razlika. Zenitna daljina mjerena je na jednoj ili obje krajnje tačke. Izrazi za računanje težine izvedeni su iz modela mjernog postupka.

Težine u slučaju dvostrano mjerenih zenitnih udaljenosti (Mihajlović, 1978) određuje se na sljedeći način:

- Polazi se od jednačine za računanje standardnog odstupanja visinske razlike $\sigma_{\Delta h}$ na osnovu obostranih mjerenja:

  - ne uzima se u obzir uticaj refrakcije:

$$\sigma_{\Delta hk}^2 = \frac{S_k^4}{4R^2}\sigma_k^2 \approx 0 \tag{4.45}$$

  - ne uzimase u obzir uticaj tačnosti dužine:

$$\sigma_{\Delta hs}^2 = \frac{\cos^2 z}{2}\sigma_s^2 \approx 0 \tag{4.46}$$

  - S obzirom na gore navedeno dobijese sljedeći izraz:

$$\sigma_{\Delta hi\mathrm{obos}}^2 = \frac{S_i^2}{2}\sigma_{z_1}^2 + \frac{\sigma_i^2}{2} + \frac{\sigma_l^2}{2} \tag{4.47}$$

- Ako se pretpostavi da su visina instrumenta i signala određeni puno tačnije nego visinska razlika, tj. vrijedi da je:

  $\sigma_i = \sigma_l \approx 0,$

Dobije se da je varijanca visinske razlike u slučaju obostrano mjerenih zenitnih udaljenosti:

$$\sigma_{\Delta hi\mathrm{obos}}^2 = \frac{S_i^2}{2}\sigma_{z_1}^2 \tag{4.48}$$

Težina se usvoji kao recipročnu vrijednost varijance:

$$p_{\Delta h_{i\mathrm{obos}}} = \frac{2k}{S_i^2\sigma_{z_1}^2} \tag{4.49}$$

- Ako se pretpostavi da su izmjerene zenitne udaljenosti jednake tačnosti ($\sigma_{z_i} = \sigma_z$), usvoji se konstantu $K = \frac{2k}{\sigma_z}$, pa se dobije da je težina obostrano mjerene visinske razlike recipročna kvadratu udaljenosti između tačaka:

$$p_{\Delta h_{i\mathrm{obos}}} = \frac{K}{S_i^2} \tag{4.50}$$

Težine u slučaju jednostrano mjerenih zenitnih udaljenosti određuje se na osnovu izraza:

- standardno odstupanje za jednostrano mjerenje može se napisati kao sljedeći izraz:

$$\sigma_{\Delta h_{ijednos}} = \sigma_{\Delta h obost}\sqrt{2} \tag{4.51}$$

Kvadriranjem se dobije varijanca da bi se mogla odrediti težina:

$$p_{\Delta h_{jednos}} = \frac{2\mathrm{k}}{2S_i^2\sigma_{z_1}^2} \tag{4.52}$$

Težina jednostrano određene visinske razlike je dva puta manja od težine obostrano određene visinske razlike:

$$p_{\Delta h_{obost}} = 2p_{\Delta h_{jednos}} \tag{4.53}$$

Ovo vrijedi pod pretpostavkom da je $\sigma_{\Delta h_k} = 0$.

Daljnim pojednostavljenjem, pri izravnanju visinskih razlika određenih metodom trigonometrijskog nivelmana za konstantu K usvojimo da je $\mathrm{K} = 1$ pa se dobije izraz za jednostrano određene visinske razlike:

$$p_{\Delta h_{jednos}} = \frac{1}{2S_i^2} \tag{4.54}$$

za dvostrano određene visinske razlike da je:

$$p_{\Delta h_{jednos}} = \frac{1}{S_i^2} \tag{4.55}$$

4.2.6 Tačnost (preciznost) geometrijskog nivelmana

U geometrijskom nivelmanu visinska razlika Δh_{ik} određuje se kao suma pojedinih visinskih razlika određenih na stanicama (Mihajlović & Aleksić, 2008):

$$\Delta h_{ik} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \cdots + \Delta h_n \tag{4.56}$$

Standardno odsupanje ovako dobivene visinske razlike je:

$$\sigma_{\Delta h_{ik}}^2 = \sigma_{\Delta h_1}^2 + \sigma_{\Delta h_2}^2 + \cdots + \sigma_{\Delta h_n}^2 \tag{4.57}$$

U slučaju pogodnog terena, gdje postoji mogućnost postizanja vizura iste dužine standardna odstupanja su jednaka, tj. $\sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{\Delta h_2} = \cdots = \sigma_{\Delta h_2} = \sigma_{\Delta h}$, što daje izraz:

$$\sigma_{\Delta h_{ik}}^2 = n\sigma_{\Delta h}^2 \tag{4.58}$$

ili standardno odstupanje visinske razlike:

$$\sigma_{\Delta h_{ik}} = \sigma_{\Delta h}\sqrt{n} \tag{4.59}$$

Težina visinske razlike određene geometrijskim nivelmanom je:

$$p_{\Delta h_{ik}} = \frac{k}{\sigma^2_{\Delta h_{ik}}} \tag{4.60}$$

Ako je:

$$n = \frac{d}{S} \tag{4.61}$$

gdje je:

n – broj stanica.

S – dužina vlaka

d – dužina vizure.

Nakon uvođenja zamjene u jednačini dobije se da je težina nivelane visinske razlike:

$$p_{\Delta h_{ik}} = \frac{1}{S} \tag{4.62}$$

U slučaju nepovoljnog terena za težinu uzima se:

$$p_{\Delta h_{ik}} = \frac{1}{n} \tag{4.63}$$

4.2.7 Tačnost (preciznost) koordinatnih razlika

U nekim slučajevima korisno je u računanja ići sa koordinatnim razlikama $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}h$ koje su dobivene na osnovu mjerenja kosih dužina$d$, horizontalnih pravaca i zenitnih udaljenosti$z$. Koordinatne razlike dobivene na ovaj način mogu se dati izrazom (van Cranenbroeck & Brown, 2016):

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta h \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} \sin z \sin \nu \\ \sin z \cos \nu \\ \cos z \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

Da bi se primijenio opšti zakon o prirastu grešaka, gornju jednačinu treba linearizirati:

$$\boldsymbol{Q}_{cc} = \begin{bmatrix} \sin z \sin \nu & d \cos z \sin \nu & d \sin z \cos \nu \\ \sin z \cos \nu & d \cos z \cos \nu & -d \sin z \sin \nu \\ \cos z & 0 & -d \sin z \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

Procjena varijance mjerenja uvedena je kao:

$$\boldsymbol{Q}_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Varijanc kovarijanc matrica koordinata tačaka formulirana je kao:

$$\boldsymbol{Q}_{\Delta x \Delta y \Delta h} = \boldsymbol{Q}_{cc} \boldsymbol{Q}_{ll} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{T}} \tag{4.67}$$

5 Procjena komponenti varijance

Obrada mjerenih podataka u geodetskim aplikacijama najčešće koristi metodu najmanjih kvadrata, za koju je potrebno pravilno odrediti stohastički model mjerenih veličina. Stohastički model opisuje tačnost mjerenih veličina i njihovu međusobnu povezanost. Određivanje realne kovarijanc matrice mjerenih veličina daje nam višestruku korist (Amiri - Simkooei, 2007):

- omogućuje dobivanje najbolje linearne (minimalna varijanca) nepristrane procjene nepoznatih parametara,
- daje realan opis tačnosti procijenjenih nepoznatih,
- uz poznavanje distribucije podata, omogućava postavljanje pravilne hipoteze za ispitivanje i procjenu kvaliteta kontrolnih mjerenja.

Kovarijanc matrica općenito nije poznata. Njen izgled je stoga potrebno a priori procijeniti. Čak i ako uzmemo u obzir sva pravila i provjerene metode, a priori ocjena $\boldsymbol{Q}_{ll}$ je hipotetična. Logičan put za rješenje ovog problema bio bi, da se pored nepoznatih parametara također procijene i ¨težine¨ $\boldsymbol{Q}_{ll}^{-1}$. Izlaz iz ove situacije nude metode, koje omogućuju istovremeno ocjenu $\mathbf{x}$ vektora nepoznatih parametara i a posteriori određivanje odnosa težina između mjerenih veličina. Opšti slučaj procjene varijance i kovarijance ($\boldsymbol{Q}_{ll}$ potpuna matrica) je veoma kompleksan. Zbog toga su obično metode ograničene na ocjenu varijance opažanja ($\boldsymbol{Q}_{ll}$ dijagonalna matrica nekoreliranih opažanja). Najčešći način rješavanja problema je na osnovu grupiranja mjerenja. Grupu čine mjerenja s poznatimmeđusobnim odnosima tačnosti. Prema tome, poznate su i težine u grupama mjerenja (Kogoj, 1992).

A posteriori procjena vrijednosti standardnih odstupanja pojedinačnih grupa određuje nove težine grupa, koje su osnova za novo izravnanje. Metoda a posteriori određivanja težina su prema tome iteracijski postupci.

Postoji veliki broj publikacija koje izvještavaju o primjeni metode procjene komponenti varijance na geodetskim mjerenjima:

- procjena u klasičnoj triangulacionoj i trilateracionoj mreži za praćenje tektonskih aktivnosti, gdje su mjerenja izvršena različitim elektrooptičkim daljinomjerima i teodolitima, procjena komponenti grešaka i težina GPS mjerenja (Chen i dr., 1990),
- istraživanje najpodesnije metode procjene komponenti varijance u klasičnoj triangulacionoj i trilatacionoj 2D mreži, gdje su mjerenja izvršena elektroptičkim daljinomjerima i teodolitima (Kogoj, 1992), (Yavuz & Baykal, 2006), (Bacigal i dr., 2006), (Vodopivec & Kogoj, 1997)
- procjena karakteristika različitih tipova šuma dnevnih koordinata vremenskih serija permanentnih GPS stanica (Zhang, i dr., 1997), (Mao i dr., 1999), (Williams, i dr., 2004), (Amiri – Simkooei i dr., 2007), (Li i dr., 2008),
- primjena metode najmanjih kvadrata procjene komponenti varijance na geometrijski zasnovanom GPS modelu opažanja(Amiri – Simkooei i dr., 2013),
- istraživanje stohastičkih modela za SLR i VLBI podatke opažanja (Sahin i dr., 1992), (Kizilsu & Sahin, 2000), (Lucas & Dillinger, 1998),
- procjena stohastičkog modela za procesiranje kodnih i faznih podataka koji uključuju vremensku korelaciju GPS mjerenja (Satirapod i dr., 2002), (Tiberius & Kenselaar, 2000), (Yin i dr., 2005),
- procjena komponenti varijance i težina za različite tipove podataka u modelima gravitacionog polja (Koch & Kusche, 2002), (Kuche, 2003),
- procjena kovarijanc matrice za izravnanje kombinovanih tipova podataka visina, elipsoidnih, ortometrijskih i geoidnih (Fotopoulos, 2003), (Fotopoulos, 2005), (Kiamehr & Eshagh, 2008),
- procjena komponenti varijance statičkog relativnog GPS pozicioniranja dvostrukih faznih razlika (Gopaul i dr., 2010),
- algoritmi procjene komponenti varijance za statička i kinematička GPS SPP, (Wang i dr., 2009),
- istraživanje najpodesnije metode procjene komponenti varijance za kombinovane terestričke okvire (Bähr i dr., 2007),
- kalibracija grešaka modela kvazi-geoida Švedske, dobivenog na osnovu GNSS mjerenja i preciznog geometrijskog nivelmana (Eshagh, 2010),
- funkcionalni i stohastički model sateliskih gravitacionih podataka (van Loon, 2008),
- istraživanje rješenja za procjenu ne negativnih komponenti varijance (Moghtased i dr., 2014), (Sjöberg, 2011).

Metode za procjenu varijanc kovarijanc komponenti intenzivno su istraživane u statističkoj i geodetskoj literaturi. Tokom nekoliko decenija istraživanja razvijen je veliki broj metoda za procjenu komponenti varijance. Pravilan i potpun pregled ovih metoda nije ni lahko ni jednostavnonapraviti, a i prevazišao bi opseg ovog teksta. Akcenat je stavljen na istraživanja u geodeziji, koja su fokusirana za primjenu na heterogenim podacima. U literaturi ima veliki broj pristupa za klasifikacije procedura za karakterizaciju metoda procjene komponenti varijance. U skladu s Crocceto i dr. (2000), a potom i u radovima kod Fotopoulos (2003) i Amiri-Simkooei (2007) gdje većina metoda za procjenu varijanc kovarijanc komponenti u okviru metode najmanjih kvadrata mogu se svrstati u skladu sa sljedećim:

- funkcionalni model,
- stohastički model,
- procedura procjene,
- pojednostavljenja, pretpostavke.

Prepoznavši korist ovakve kategorizacije (Tabela 5-1) sistematizira istorijski pregled razvoja značajnih metoda procjene komponenti varijance u geodetskoj literaturi.

Tabela 5-1 Istorijski pregled razvoja metoda za procjenu varijanc kovarijanc komponenti (Fotopoulos, 2003)

Reference	**Funkcionalni model**	**Stohastički model**	**Procedura procjene**
Helmert (1924)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sigma_i^2 \boldsymbol{Q}_i$	Helmert
Kubik (1970)	Gauss-Helmert	$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}[\sigma_i^2 \boldsymbol{I}_i]$	MLE
Rao (1971)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{Q}_i$	MINQUE
Sjöberg (1983)	Uvjetni-samo Gauss- Helmert	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \boldsymbol{Q}_i$	MINQUE
Sjöberg (1983)	Gauss- Helmert	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \boldsymbol{Q}_i$	Iterativna BIQUE, BQMBNE BQUNE
Grafarend (1984)	Uslovni – samo Gauss- Helmert	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{Q}_\mathrm{i}$	Helmert
Koch (1986)	Gauss-Markov	Bez ograničenja	Iterativna MLE
Koch (1987)	Gauss-Markov	Bez ograničenja	Približna Bayesian izvođenje
Koch (1988)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{Q}_i$	Bayes procjena
Caspary (1987)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \boldsymbol{Q}_i$	Iterative BIQUE

Ou Ziqiang (1989)	Gauss-Markov Uslovni - samo	$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \boldsymbol{Q}_{11} & \sigma_{12}^2 \boldsymbol{Q}_{12} & \cdots & \sigma_{1m}^2 \boldsymbol{Q}_{1m} \\ \sigma_{21}^2 \boldsymbol{Q}_{21} & \sigma_{22}^2 \boldsymbol{Q}_{22} & \dots & \sigma_{2m}^2 \boldsymbol{Q}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}^2 \boldsymbol{Q}_{m1} & \sigma_{m2}^2 \boldsymbol{Q}_{m2} & \dots & \sigma_{mm}^2 \boldsymbol{Q}_{mm} \end{bmatrix}$	Iterativna MLE
Ou Ziqiang (1991)	Gauss- Markov	$\boldsymbol{C} = diag[\sigma_i^2 \boldsymbol{P}^{-1}]$	Bayes
Yu (1992)	Gauss-Helmert	$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \boldsymbol{Q}_{11} & \sigma_{12}^2 \boldsymbol{Q}_{12} & \cdots & \sigma_{1m}^2 \boldsymbol{Q}_{1m} \\ \sigma_{21}^2 \boldsymbol{Q}_{21} & \sigma_{22}^2 \boldsymbol{Q}_{22} & \dots & \sigma_{2m}^2 \boldsymbol{Q}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}^2 \boldsymbol{Q}_{m1} & \sigma_{m2}^2 \boldsymbol{Q}_{m2} & \dots & \sigma_{mm}^2 \boldsymbol{Q}_{mm} \end{bmatrix}$	BIQUE
Sjöberg (1995)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sigma_1^2 \boldsymbol{I} + \sigma_2^2 \boldsymbol{F}$	BQMBNE
Yu (1996)	Gauss-Helmert	$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \boldsymbol{Q}_{11} & \sigma_{12}^2 \boldsymbol{Q}_{12} & \cdots & \sigma_{1m}^2 \boldsymbol{Q}_{1m} \\ \sigma_{21}^2 \boldsymbol{Q}_{21} & \sigma_{22}^2 \boldsymbol{Q}_{22} & \dots & \sigma_{2m}^2 \boldsymbol{Q}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1}^2 \boldsymbol{Q}_{m1} & \sigma_{m2}^2 \boldsymbol{Q}_{m2} & \dots & \sigma_{mm}^2 \boldsymbol{Q}_{mm} \end{bmatrix}$	MLE
Crocceto i dr. (2000)	Bez ograničenja	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{Q}_i$ $\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{Q}_i = \mathrm{diag}\left[\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} \mathrm{diag}(q_i)\right]$	BIQUE
Schaffrin & Iz (2002)	Rank deficient Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}^{-1}$	BLIMPBE
Tiberius and Kenselaar (2003)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{Q}_\mathrm{i}$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}_0 + \sigma_i^2 c_i c_i^\mathrm{T}$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}_0 + \sigma_{ij}\left(c_i c_j^\mathrm{T} + c_j c_i^\mathrm{T}\right)$	BQUE & AUE
Kusche (2003)	Gauss-Markov	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \boldsymbol{V}_i\,, \qquad \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{V}_i = \mathrm{diag}(\boldsymbol{P}^{-1})$	Monte-Carlo
Teinissen i Amiri – Simkooei (2007)	Uslovni	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{B}^\mathrm{T} + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_i\, \boldsymbol{B}^\mathrm{T} \boldsymbol{V}_i$	LS

Za obradu geodetskih mjerenja koristi se nekoliko funkcinalnih modela. Funkcionalni model uopšteno, daje relacije koje povezuju opažanja i nepoznate parametre. Jedan od uobičajenih izbora je Gauss-Markov model koji je dat jednačinom (3.2). Kako se može vidjeti u drugoj koloni u Tabela 5-1 većina algoritama za procjenu komponenti varijance koristi Gauss– Markov funkcionalni model.

Alternativa ovom modelu je da se jednačine opažanja formiraju u obliku uslovne jednačine. Ovaj model je poznat kao uslovni model i dat je opštom jednačinom (Fotopoulos, 2003):

$$\boldsymbol{Bv} = \boldsymbol{\omega} \tag{5.1}$$

gdje je:

$\boldsymbol{B}$ - $m \times n$ **–** matrica koeficijenata uslovnih jednačina**,**

$\boldsymbol{\omega}$ -$m \times 1$ - matrica grešaka definisana specifičnim uslovima,

$\boldsymbol{v}$ - $nx1$– vektor popravaka mjerenja i

m - broj uslova.

Primjeri samo nekih od algoritama procjene koji implementiraju ovoj funkcionalni model su: Sjöberg (1983), Grafarend (1984) te Ou (1989)

Drugi jednako čest funkcionalni model koji uključuje opažanja i nepoznate parametre, Gauss-Helmertov model, poznat kao mješoviti ili implicitni model dat je jednačinom (Fotopoulos, 2003):

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bv} + \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0} \tag{5.2}$$

gdje je:

$\boldsymbol{A}$ - $n \times u$ – matrica koeficijenata posrednih mjerenja,

$\boldsymbol{B}$ - $m \times n$ **–** matrica koeficijenata uslovnih jednačina**,**

$\boldsymbol{\omega}$ - $m \times 1$- matrica grešaka definisana specifičnim uslovima,

$\boldsymbol{v}$ - $n \times 1$ – vektor popravaka mjerenja,

n – broj mjerenja,

u – broj nepoznatih parametara i

m - broj uslova.

Primjenom ovog funkcionalnog modela razvijeno je nekoliko procedura procjene, opisanih u publikacijama Kubik (1970), Yu (1992) i (1996). Uopšteno govoreći, izbor prikladnog funkcionalnog modela opisan je od strane istraživača i u skladu je s aplikacijom. Poželjna osobina procjene je da bude neovisna od izabranog funkcionalnog modela.

5.1 Stohastički modeli

Za rješavanje geodetskih problema korišteni su brojni različiti stohastički modeli. Jedan od najčešće korištenih stohastičkih modela za kovarijanc matricu opažanja $\boldsymbol{C}$ je sljedeći (Fotopoulos, 2003):

$$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{Q}_i \tag{5.3}$$

gdje su nepoznate varijanc kovarijanc komponente označene sσ_i, a poznate pozitivno definitne kofaktor matrice s $\mathbf{Q}_i$. Ovaj stohastički model korišten u više radova i studija, uključujući prije svega: Rao (1971), Grafarend (1984), Koch (1987) i (1988) te u radu Tiberius i Kenselaar (2003). Ovdje, u svakom slučaju treba napomenuti da se komponente varijance i kovarijance procjenjuju poslije.

Sljedeći, često primjenjivan stohastički model dat je izrazom (5.4)(Fotopoulos, 2003):

$$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \boldsymbol{Q}_i \tag{5.4}$$

Kod primjene ovog stohastičkog modela, procjenjuju se samo komponente varijance. Ovaj stohastički model primjenjivan je u mnogo aplikacija, a neke od njih su opisane u radovima Sjöberg (1984), Caspary (1987) i Fotopoulos i Sideris (2003).

Mogu se napraviti i dodatna pojednostavljena za skupove nekoreliranih skupova opažanjaa svaki skup je opisan jednom komponentom varijance na sljedeći način (Crocetto i dr., 2000):

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\left[\sigma_i^2 \boldsymbol{Q}_i\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k^2 \boldsymbol{Q}_k \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Ova blok dijagonalna forma stohastičkog modela odgovara vektorima opažanja koji su obično disjuktni, što znači da su potpuno nekorelirani između grupa, ali može postojati korelacija između grupa. Ovaj stohastički model uspješno su primijenili Ou Ziqiang (1991) i Crocetto i dr. (2000), kako na simuliranim numeričkim primjerima tako i u stvarnom svijetu aplikacija. Ako disjuktni skupovi imaju istu preciznost, može se koristiti sljedeći stohastički model (Fotopoulos, 2003):

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\left[\sigma_i^2 \boldsymbol{I}\right] \tag{5.6}$$

U ovom slučaju kofaktor matrica je zamijenjena jediničnom matricom $\mathbf{I}$, za više detalja može se vidjeti Kubik (1970). Specifičan stohastički model koji je efikasan za suočavanje s velikim skupovima podataka (pod pretpostavkom da su normalno distribuirana) je blok struktuirana varijanc matrica opisana kao u izrazu 0 (Fotopoulos, 2003):

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \boldsymbol{Q}_{11} & \sigma_{12} \boldsymbol{Q}_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \boldsymbol{Q}_{1m} \\ \sigma_{21} \boldsymbol{Q}_{21} & \sigma_{22}^2 \boldsymbol{Q}_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \boldsymbol{Q}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m1} \boldsymbol{Q}_{m1} & \sigma_{m2} \boldsymbol{Q}_{m2} & \cdots & \sigma_{mm}^2 \boldsymbol{Q}_{mm} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

gdje σ_{ij} odgovara komponenti varijance ako je $i = j$ ili komponenti kovarijance ako je $i \neq j$. Kofaktor matrica $\mathbf{Q}_{ij}$ je poznata pozitivno definitna matrica. Sličnu blok struktuiranu matricu primijenio je Lucas i Dillinger (1998).

I na kraju, još jedan stohastički model vrijedan spomena, posebno za primjenu u geodetskim aplikacijama je suma dvije varijanc komponente opisana u radu Sjöberg (1995) na sljedeći način:

$$\boldsymbol{C} = \sigma_1^2 \boldsymbol{I} + \sigma_2^2 \boldsymbol{F} \tag{5.8}$$

gdje je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica, a $\boldsymbol{F}$ pozitivno definitna dijagonalna matrica.

5.2 Izbor procedure procjene komponenti varijance

Postoje različite metode procjene koje su zasnovane na različitim kriterijima kao što su nepristranost, minimalna varijanca, minimalna norma i maksimalna vjerovatnoća. U ovom poglavlju date su glavne karakteristike metoda, a akcenat je stavljen na glavnim principima i konačnim rezultatima

5.2.1 MINQUE metoda

Teoretska pozadina minimalne kvadratne nepristrane procjene MINQUE (MInimum Norm Quadratic Unbiased Estimators) data je u nizu radova Rao (1970, 1971 i 1979), za koju izbjegava pretpostavke distribucije. MINQUE je jedna odajčešće korištenih metoda. Ova metoda procjene proširena je na uvjetni i opšti Gauss-Helmertov model u radu Sjöberga (1983).

Ovdje se razmatra sljedeći funkcionalni model:

$$\boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.9}$$

gdje je $\boldsymbol{l}$ vektor opažanja, $\boldsymbol{x}$ vektor nepoznatih parametara, $\boldsymbol{A}$ dizajn matrica i $\boldsymbol{v}$ vektor popravaka. Dalje, smatramo da je kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{C}_l$ razložena na (Amiri - Simkooei, 2007)

$$\boldsymbol{C}_l = \sum_{1}^{k} \theta_i \boldsymbol{T}_i \tag{5.10}$$

gdje su $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ nazvane varijanc kovarijanc komponente koje trebaju biti procijenjene, a $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \dots, \boldsymbol{T}_k$ su odgovarajuće matrice koeficijenata.

Kvadratna funkcija $\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}$ kažemo da treba da bude nepomjereni procjenitelj minimalne kvadratne norme linearne funkcije, $\sum_{i=1}^{k} \theta_i \boldsymbol{T}_i$, s nepristranosti i invarijantnosti na $\boldsymbol{x}$, ako je kvadratna matrica $\boldsymbol{M}$ određena iz sljedeće optimizacije problema (Rao, 1970):

$$\boldsymbol{C}_l = \sum_{1}^{k} \theta_i \boldsymbol{T}_i \tag{5.11}$$

$$\mathrm{tr}\{\boldsymbol{MCMC}\} = \min \tag{5.12}$$

podliježe

$$\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{0} \tag{5.13}$$

i

$$\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{0}, \qquad \mathrm{tr}\{\boldsymbol{MT}_i\} = p_i \text{ , za sve } i \tag{5.14}$$

Rješenjem jednačina(5.12) (5.12) , (4.13) i (5.14) dobijemo procjenu varijanc-kovarijanc komponenti(Rao, 1971), kao u izrazu (5.15)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_{1,} \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q} \tag{5.15}$$

gdje je matrica $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}$sa čalnovima zadovoljava izraz:

$$s_{ij} = \mathrm{tr}\{\boldsymbol{RT}_i\boldsymbol{RT}_j\} \tag{5.16}$$

i vektor $\boldsymbol{q} = \{q_i\}$ sa

$$q_i = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{RT}_i \boldsymbol{Rl} \tag{5.17}$$

a,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{PQ}_v\boldsymbol{P} \tag{5.18}$$

matrica $\boldsymbol{Q}_v = [\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]$ je kofaktor matrica popravaka koja se dobije iz izravnanja.

Između matrica $\boldsymbol{l}$ i $\boldsymbol{v}$ postoje sljedeće relacije:

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{Q}_v \boldsymbol{P} \boldsymbol{l} \tag{5.19}$$

i

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \tag{5.20}$$

Prema jednačinama (5.19) i (3.21) jednačina (5.17) može biti napisana kao:

$$q_i = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{R}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \tag{5.21}$$

Može se primjetiti da u jednačinama (5.15), (5.16),(5.17) i (5.18) procjena varijanc kovarijanc komponenti zavisi od matrice $\boldsymbol{C}$, što uključuje i njene varijanc kovarijanc komponente. Prema tome, mora se izvesti iterativni proces. Početne, a priori vrijednosti vrijednosti $\boldsymbol{\theta}_i$ data su s vrijednošću $\boldsymbol{\theta}_i^0$. Koristeći jednačinu (5.15) dobi je se početna $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^1$ procjena komponenti varijance.

U $(j+1)$-toj iteracijskom koraku, koristi se prethodna procjena, tj. rezultat iz prethodne iteracije kao a priori vrijednosti, rezultat nove procjene je $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{j+1} = \boldsymbol{S}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^j)\boldsymbol{q}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^j)(j = 0, 1, 2 \ldots)$ koja je nazvana iterativna MINQUE metoda. Ako $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ konvergira, granična vrijednost $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ zadovoljit će jednačinu (5.22)

$$\boldsymbol{S}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{q}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{5.22}$$

koja dalje može biti izražena (Rao, 1971) kao:

$$\mathrm{tr}\{\boldsymbol{R}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{T}_i\} = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{R}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{R}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{l} \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{5.23}$$

5.2.2 BIQUE metoda

Najbolja invarijantna kvadratna nepristrana procjena BIQUE (Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation) je kvadrat-bazirana procjena u stohastičkom modelu, a srodna je najboljoj linearnoj nepristranoj procjeni Best Linear Unbiased Estimation(BLUE) metodi. Obje ove metode daju procjenu minimalne varijance. Značajan broj autora je istraživao i primjenjivao ovu metodu. Među prvima je Koch (1978) koristeći Lagrange-ov multiplikator riješio najbolju kvadratnu nepristranu procjenu kada su opažanja normalno distribuirana. Caspary (1987) u svom radu takođe pretpostavlja da su opažanja normalno distribuirana, te kovarijanc matricu razmatra kao sumu komponenti varijance. On je definirao BIQUE metodu i iterativnu proceduru ove procjene. Sjöberg (1984) je u svojim razmatranjima pretpostavio normalnu distribuciju opažanja i stohastički model kao sumu komponenti varijance. On je predložio iterativnu proceduru za BIQUE proceduru i u svom radu je pokazao koincidenciju ove motode sa MINQUE. U svom radu Yu (1992) je pretpostavio opšti funkcionalni model (Gauss – Helmermtov) i blok-struktuirani stohastički model, te je izveo BIQUE proceduru i dokazao da su metode MINQUE opisana u Rao (1971)te metoda BIQUE opisana uSjöberg (1984) samo specijalni slučajevi ove procjene. Pored ovoga, Yu (1992) dokazuje da je u slučaju blok-struktuirane kovarijanc matrice, Helmertova procjena identična kao u BIQUE metodi. Crocetto (2000) daje pojednostavljenu BIQUE proceduru procjene koja može biti primijenjena na sva izjednačenja metodom najmanjih kvadrata.

U nastavku se navode osnovna svojstva i konačni rezultat BIQUE metode. Ponovo se razmatra procjenitelj kao linearna funkcija $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ komponenti varijance i to kao kvadratnu formu opažanja $\boldsymbol{f}^{T}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{l}^{T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}$, pa se dobije sljedeće (Amiri - Simkooei, 2007):

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{E}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}\right) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.24}$$

Striktno govoreći, prva dva uslova nepristranosti i invarijatnosti su ista kao kod Rao (1971) koji su dati jednačinama (5.13) i (5.14), a treći uslov za procjenu BIQUE metode je da procjena treba biti minimalne varijance („najbolja"). Primjenom univerzalne formule za varijancu kvadratne forme Koch (2004):

$$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}\right) = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}) \tag{5.25}$$

Ovdje se može primjetiti da su uslovi nepristranosti i invarijantnosti nezavisni od distribucije opažanja. Da bi se dobila najbolja procjena, tj. procjenu minimalne varijance, jednačina (5.25) mora biti minimizirana, s poštivanjem nepoznatih vrijednosti, preciznije matrice $\boldsymbol{M}$. Međutim, mora se uzeti u obzir da formula sadrži a priori nepoznate komponente varijance unutar matrice $\boldsymbol{C}$. Da bi se moglo doći do rješenja mora se primijeniti iterativni pristup.

Minimiziranjem procjene varijance kvadratne norme minimiziranjem Lagrange-ove funcije za više detalja (Koch K. R., 2004) koja sadrži ograničenja nepristranosti i invarijantnosti (Amiri - Simkooei, 2007) dobije se sljedeći izraz:

$$2\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}) - 4\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\right) - 4\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_i)\right) - p_i \\ \rightarrow \min \tag{5.26}$$

gdje je $4\boldsymbol{\Lambda}$ označava matricu Lagrangeovih multiplikatora za ograničenje $\boldsymbol{M}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$,a $-4\lambda_k$ su Lagrange-ovi multiplikatori za ograničenje $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_i) = 0$. Rješenjem $\boldsymbol{M}$ iz gornjeg problema (5.26) minimuma vodi ka rješenju datom u jednačinama (5.15), (5.16) i (5.17).

5.2.3 Helmertova metoda

Helmert ova metoda procjene vjerovatno je najpopularnija procedura za procjenu varijanc kovarijanc matrice. Metodu procjene komponenti varijance izveo je Helmert (1907), gdje je koristio kvadrate najmanjih popravaka da bi procijenio heterogene komponente varijance. Koristeći Gauss-Markov model, Helmert (1924) predlaže postupni metod za nepristranu procjenu komponenti varijance. Grafarend (1984) proširuje Helmertovu metodu na model uslovnih jednačina i na Gauss – Helmertov funkcionalni model.

Helmert je za procjenu komponenti varijance koristio popravke $\boldsymbol{v}$ određene po metodi najmanjih kvadrata.

Popravke se računaju po sljedećem izrazu (Amiri - Simkooei, 2007):

$$\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)^{-1} - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{l} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)^{-1} - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \tag{5.27}$$

gdje je $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)^{-1} - \boldsymbol{I}\right)$, a Grafarend (1980) je ovu matricu nazvao test matrica.

U svom radu Grafarend (1985) proširio je Helmertovu procjenu komponenti varijance u procjenu varijanc kovarijanc komponenti, te je za stohastički model uveo matricu podijeljenu u blokove.

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2\boldsymbol{Q}_{11} & \sigma_{12}\boldsymbol{Q}_{12} & \cdots & \sigma_{1m}\boldsymbol{Q}_{1m} \\ \sigma_{21}\boldsymbol{Q}_{21} & \sigma_2^2\boldsymbol{Q}_{22} & \cdots & \sigma_{2m}\boldsymbol{Q}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m1}\boldsymbol{Q}_{m1} & \sigma_{m2}\boldsymbol{Q}_{m2} & \cdots & \sigma_m^2\boldsymbol{Q}_{mm} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^{l} \boldsymbol{\theta}_r \widetilde{\boldsymbol{Q}}_r \tag{5.28}$$

gdje je $\mathrm{D}(\boldsymbol{v})$ - blok podijeljena matrica, $\boldsymbol{Q}_{ij}$ - blok matrica:

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ \widetilde{\boldsymbol{Q}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{Q}_{12} & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{Q}_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{Q}}_3 = \tag{5.29}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Q}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{l-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \boldsymbol{Q}_{(m-1)m} \\ 0 & \dots & \mathbf{Q}_{m(m-1)} & 0 \end{bmatrix} i \ \widetilde{\boldsymbol{Q}}_l =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{Q}_{mm} \end{bmatrix} \text{i}$$

Ovdje se uvodi oznaka $\boldsymbol{Q} = \left(\boldsymbol{Q}_{ij}\right)_{m\times m}$.

Matrica težina je $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1} = (\boldsymbol{P}_{ij})_{m\times m} = \sum_{r=1}^{l} \widetilde{\boldsymbol{P}}_r$, ovdje je:

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{P}}_2 = \tag{5.30}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{P}_{12} & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{P}_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{P}}_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{P}}_{l-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \boldsymbol{P}_{(m-1)m} \\ 0 & \dots & \boldsymbol{P}_{m(m-1)} & 0 \end{bmatrix} i \ \widetilde{\boldsymbol{P}}_l =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{P}_{mm} \end{bmatrix} \text{i}$$

Varijanc matrica popravaka računa se izrazom:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{v}) = \widetilde{\boldsymbol{R}}\mathrm{D}(\boldsymbol{v})\widetilde{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} = \sum_{\boldsymbol{r}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{\theta}_r \, \widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_r\widetilde{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} \tag{5.31}$$

Očekivanje kvadratne forme $i - te$ grupe $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{v}$ računa se izrazom:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{v}) = \mathrm{E}[\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})] = \mathrm{tr}[\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\mathrm{E}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})] \\ = \mathrm{tr}[\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\mathrm{D}(\boldsymbol{v})] = \sum_{r=1}^{l}\boldsymbol{\theta}_r\mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_r) \tag{5.32}$$

Prethodna jednačina može se napisati u kompaktnoj formi, pa vodi Helmertovoj procjeni varijanc kovarijanc komponenti (Grafarend, 1985):

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \widetilde{\boldsymbol{S}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{w}} \tag{5.33}$$

gdje je $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_l)^{\mathrm{T}}$; $\widetilde{\boldsymbol{S}} = (\widetilde{\boldsymbol{S}}_{ij})$; $\widetilde{\mathbf{S}}_{ij} = \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j)$; $\widetilde{\boldsymbol{w}} = (\widetilde{\boldsymbol{w}}_1, \widetilde{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{w}}_l)^{\mathrm{T}}$ i

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_i = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{v} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\widetilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{l}$$

Kovarijanca procjene računa se izrazom:

$$\mathrm{D}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = 2\widetilde{\boldsymbol{S}}^{-1} \tag{5.34}$$

Računanje koeficijena $\widetilde{\boldsymbol{S}} = (\widetilde{\boldsymbol{S}}_{ij})$ i $\widetilde{\boldsymbol{w}}_i$može biti pojednostavljeno ako stohastički model ima sljedeću blok dijagonalnu strukturu:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \sigma_{01}^2\boldsymbol{Q}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{02}^2\boldsymbol{Q}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{0m}^2\boldsymbol{Q}_m \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

Komponente varijance mogu biti procijenje iz sljedećih jednačina (Wang i dr., 2009):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{v}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m^T\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1i} & \cdots & s_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{i1} & \cdots & s_{ii} & \cdots & s_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mi} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{01}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{02}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{0m}^2 \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

gdje je $\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i$, $s_{ii} = n_i - 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i)$, a $s_{ij} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_j)$za $i \neq j$ za $i, j = 1, \ldots, m$.

5.2.4 Procjena maksimalne vjerovatnoće

Metoda procjene maksimalne vjerovatnoćeMLE (Maximum Likelihood Estimation) je jedna od konceptualno jednostavnijih metoda (Amiri - Simkooei, 2007), a može se primijeniti samo u slučaju da je poznata opšta struktura funkcije gustoće vjerojatnoće. Većina napora na polju procjene varijanc kovarijanc komponenti ograničena je na normalnu distribuciju. Razvijene su dvije metode procjene komponenti maksimalne vjerovatnoće, maksimalne vjerovatnoće i ograničene maksimalne vjerovatnoće REML (Restricted Maximum Likelihood Estimation).

Koriseći Gauss-Helmertov matematički model, Kubik (1970) je razmatrao pojednostavljeni stohastički model. Za procjenu odnosa težina u kombinovanoj mreži pravaca i dužina koristio je metod maksimalne vjerovatnoće. U svom radu Koch (1986), u kojem predpostavlja Gauss-Markov model i opažanja s normalnom raspodjelom, izvodi iterativnu proceduru maksimalne vjerovatnoće za procjenu varijanc kovarijanc komponenti, koristeći ortogonalni komplement funkcije vjerovatnoće. Ovaj pristup je ekvivalentan sa REML metodom. U svom radu također pokazuje da je ova procjena identična sa BIQUE i MINQUE metodama procjene komponenti varijance. Ou (1989)je pretpostavio isti funkcionalni model i normalno distribuirana opažanja, uz pretpostavku blok strukturane kovarijanc matrice, gdje je pokazao da je iterativna procjena maksimalne vjerovatnoće identična metodama Helmert (1924) i Koch (1986). Uzimajući iste pretpostavke funkcionalnog i stohastičkog modela, Yu (1996) izvodi procjenu maksimalne vjerovatnoće varijanc kovarijanc komponenti. On je proširio formule Kocha (1986) i Kubika (1970). Pored toga, dokazao je ekvivalenciju procjena maksimalne vjerovatnoće, Helmertove i BIQUEmetode.

Uz pretpostavku da vektor opažanja $\boldsymbol{l}$ ima višedimenzionalnu normalnu raspodjelu:

$$\boldsymbol{l} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{Ax}, \sum_{k=1}^{p} \sigma_k \boldsymbol{Q}_k\right) \tag{5.37}$$

Prirodni logaritam funkcije vjerovatnoće vektora opažanja $\mathbf{l}$je:

$$\ln L(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{m}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\det(\boldsymbol{Q}_l) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_l^{-1}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{Ax}) \tag{5.38}$$

Nepoznati parametri logaritma funkcije vjerovatnoće (tj. $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\sigma}$) riješeni su tako što se parcijalni izvodi po nepoznatim parametrima izjednače s nulom. Maksimizacija funkcije $\ln L$ poštivanjem da $\boldsymbol{x}$ donosi dobro poznate normalne jednačine procjenitelja maksimalne vjerovatnoće, daje identičan rezultat kao metoda najmanjih kvadrata ili najbolja linearna nepristrana procjena.

5.2.5 Bayesian metoda

Usko povezan pristup s metodom maksimalne vjerovatnoće za procjenu nepoznatih varijanc kovarijanc komponenti u linearnom modelu je Bayesian metoda (Koch K. , 1987). Obje metode za procjenu varijanc kovarijanc komponenti, (tj. metoda maksimalne vjerovatnoće i Bayesian metoda) zahtijavaju poznavanje raspodjele opažanja. Ključna razlika je da Bayesian metoda zahtijeva neke apriori informacije o vektoru varijanc kovarijanc komponenti u formi a priori funkcije gustoće vjerovatnoće. Primjena Bayesian metode rezultira a posteriori funkciju gustoće vjerovatnoće, koja je rezultat funkcije vjerovatnoće podataka i a priori funkcije gustoće vjerovatnoće kovarijance. Da bi se izvršila Bayesian procjena, mogu se primijeniti klasične tehnike na a posteriori funkciju gustoće vjerovatnoće. Zajednička tehnika je računanje maksimalne vjerovatnoće, koja je predstavljena u prethodnom poglavlju.

Korištenjem normalne raspodjele, Bayesian procjena i intervali povjerenja za procijenjene varijanc kovarijanc komponente dao je Koch (1987). U svom radu Ou (1991) predlaže približnu i strogu metodu za komponente varijance u Gauss-Markovom modelu za blok dijagonalnu kovarijanc matricu (disjuktivne nekorelirane grupe). Korist približne metode sastoji se u podjeli vjerovatnće u proizvod individualnih funkcija vjerovatnoće. Nekoliko godina kasnije Ou i Koch (1994) dali su analitički izraz za Bayesian procjenu komponenti varijance.

U svom radu Grodecki (1999) izvodi uopštenu procjenu maksimalne vjerovatnoće, koristeći invertnu gama funkciju kao a priori informaciju. U kasnijem radu Grodecki (2001) je izveo uopštenu procjenu maksimalne vjerovatnoće na a posteriori funkciju gustoće vjerovatnoće, bez a priori informacija za procjenu komponenti varijance. U svom radu Grodecki je još dokazao da se ova procjena numerički slaže sa procjenom Ou i Koch (1994).

5.2.6 Ne-negativne procjene

Loša osobina metoda procjene komponenti varijance je da pojedine procijenjene komponente mogu biti negativne, što jasno je, ne može biti prihvaćeno. U radovima Sjöberg (1983), Caspary (1987) i Kubik (1970) potvrđuju da se negativne BIQUE procjene mogu javiti usljed nedovoljnog broja opažanja (niska prekobrojnost u funkcionalnom modelu) ili zbog neprikladnog stohastičkog modela. Drugi razlog može biti da je približna vrijednost komponenti varijance, korištene u iterativnoj proceduri procjene ovih komponenti, su loše predložene. Da bi se izjegli ovakvi problemi dizajnirane su posebne tehnike da jamče ne-negativne procjene komponenti varijance. Idealan ne-negativni procjenitelj je nepristran i ima minimalnu varijancu između svih ne-negativnih procjena (Fotopoulos, 2003).

Kao kvadratno zasnovana procjena, predložene su dvije ne-negativne metode: najbolja kvadratna minimum pristrana ne-negativna procjena je metoda BQMBNE (Best Quadratic Minimum Bias Non-negative Estimator) i najbolja kvadratna nepristrana ne-negativna procjena BQUNE (Best Quadratic Unbiased Non-negative Estimation) (Eshagh, 2005).

Sjöberg (1995) u svom radu dokazao je da su uvjeti nenegativnosti i nepristranosti inkompatibilni u stohastičkom modelu koji sumira dvovarijancne komponente. U njegovim ranijim radovima, kao npr. Sjöberg (1984) izvedene su eksplicitne formule za BQMBNE procjene u kovarijanc modelu, koji sadrži nekorelirane disjuktivne grupe (svaka grupa sadrži dva varijanc faktora), a takođe je dao BQUNE procjenu individualnih komponenti varijance. Procjena BQUNE postoji samo u slučaju disjuktivnih nekoreliranih grupa sa samo jednim varijanc faktorom za svaku grupu. Drugim riječima, za takav model komponente varijance su uvijek pozitivne i prema tome su automatski nepristrane. Metoda BQMBNE koincidira sa metodom BQUNE metodom, ako postoji.

5.2.7 Metoda najmanjih kvadrata

Metodu najmanjih kvadrata za procjenu komponenti varijance razvio je Teunissen (1988), (Amiri - Simkooei, 2007). Više detalja o primjeni ove metode na mjerenjima u geodetskim aplikacijama može se naći u radovima Amiri-Simkooei i dr. (2007) te u Amiri-Simkooei i dr. (2013). Njihova ideja je da Gauss-Markov model opisan jednačinom (3.2) transformišu u model uslovnih jednačina korištenjem matrice $\boldsymbol{B}$ koja ispunjava uslov da je $\boldsymbol{BA} = \mathbf{0}$.

Vektor nesuglasica $\mathbf{w}$definisan je (Amiri - Simkooei, 2007)

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Bl} \tag{5.39}$$

i stohastičkim modelom:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}\,;\ \mathrm{D}(\mathbf{w}) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_L\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}_w \tag{5.40}$$

Model komponenti varijance dat sa $\boldsymbol{Q}_l = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \boldsymbol{Q}_i$ može biti napisan kao:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{ww}^{\mathrm{T}}) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{p}} \sigma_i \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_L\boldsymbol{B} \tag{5.41}$$

Razmatrana matrica $\boldsymbol{ww}^T$ ima $r(r+1)/2$ različitih elemenata, gdje je r je prekobrojnost. U daljem izvođenju koristit će se vh operator, koji slaže kolone gornje trougaone simetrične matrice jedne iznad drugih. Ne treba koristiti vec operator, jer bi to rezultiralo singularnom matricom posmatranog vektora $\mathrm{vec}\{\boldsymbol{ww}^{\mathrm{T}}\}$. Primjena vh operatora na jednačine opažanja rezultira opštim Gauss-Markovim modelom:

$$\boldsymbol{l}_{\mathrm{vh}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{vh}} \tag{5.42}$$

sa novim $r(r+1)/2 \times 1$ vektorom opažanja definisanim kao:

$$\boldsymbol{l}_{\mathrm{vh}} := \mathrm{vh}\{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\} \tag{5.43}$$

i novom $r(r+1)/2 \times q$ dizajn matricom $\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}$ definisanom kao:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}} := \mathrm{vh}\left[\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}\}, \dots, \{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_q\boldsymbol{B}\}\right] \tag{5.44}$$

i stohastičkim modelom:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{vh}}) = 0; \;\; \mathrm{D}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{vh}}) = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{vh}} \tag{5.45}$$

Prema tome, može se riješiti model komponenti varijanci sa maksimalno $r(r+1)/2$ komponenti varijance. BLUE od σ, koji je najbolji kvadratni nepristrani procjenitelj s obzirom na vektor opažanja $\mathbf{l}$, glasi:

$$\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{h} \tag{5.46}$$

sa:

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{vh}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}},$

$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{vh}}^{-1}\boldsymbol{l}_{\mathrm{vh}}.$

Ako se koristi duplicirana matrica $\boldsymbol{D}$ sa svojstvima $\boldsymbol{D} \cdot \mathrm{vh}\{\boldsymbol{M}\} = \mathrm{vec}\{\boldsymbol{M}\}$, može se reći da je prema (Amiri - Simkooei, 2007)

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{vh}}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_w^{-1} \otimes \boldsymbol{Q}_w^{-1})\boldsymbol{D} \tag{5.47}$$

Elementi matrice $\boldsymbol{N}$ mogu biti napisani kao:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{vec}\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}\}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_w^{-1} \otimes \boldsymbol{Q}_w^{-1})\mathrm{vec}\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_w^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_w^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}_j\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ij} \end{aligned} \tag{5.48}$$

gdje je korišteno:

$$\boldsymbol{I}_m = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_w^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_w^{-1} + \boldsymbol{Q}_w\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_w^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{5.49}$$

Na sličan način mogu se izračunati elementi matrice $\boldsymbol{h}$:

$$h_i = \frac{1}{2}\left(\mathrm{vec}\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}\}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_w^{-1} \otimes \boldsymbol{Q}_w^{-1})\mathrm{vec}\{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\} = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_w^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_w\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{R}\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}u_i \tag{5.50}$$

Treba imati na umu da je (Bähr, 2007):

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{N}^{-1}h = \boldsymbol{S}^{-1}u; \quad \boldsymbol{Q}_{\widehat{\sigma}} = \boldsymbol{N}^{-1} = 2\boldsymbol{S}^{-1} \tag{5.51}$$

Dakle, u slučaju normalne raspodjele, procjene komponenti varijance po metodi najmanjih kvadrata identična je metodama BIQUE i MINQUE.

5.3 Pojednostavljene metode

Korištenje formula strogih procedura za procjenu komponenti varijance često uzimaju puno vremena i zahtijevaju ogroman računski rad. Ovo je razlog da neki pristupi predlažu pojednostavljenje procesa procjene. U dostupnoj geodetskoj literaturi, predlaženi su postupci za procjenu komponenti varijance, a sve u cilju smanjenja računanja. Predlaže se primjena (Amiri - Simkooei, 2007):

- približne formule za procjenu,
- pojednostavljena formulacija funkcionalnog i stohastičkog modela.

5.3.1 Förstnerova metoda

Najpopularnije pojednostavljenje je razvijeno na temelju doprinosa prekobrojnih mjerenja opisano u Förstner (1979). Više pojedinosti o Förstnerovom algoritamu, zajedno sa važnim karakteristikama mogu se naći u radovima (Ou, 1989), (Bähr, 2007), (Kogoj, 1992). U daljnjem tekstu daje se kratak pregled metode procjene komponenti varijance.

Sistem jednačina (3.2) podijeljen je u grupe mjerenja jednake tačnosti pa jednačina poprima sljedeću formu:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \tag{5.52}$$

Primjenjujući zakon o prirastu grešeka na rješenje najmanjih kvadrata za jednačinu (5.52) varijanc matrica vektora popravaka mjerenja može biti dobivena iz sljedećeg izraza:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i} = \sigma_{0i}^2 \boldsymbol{Q}_{v_i v_i} = \sigma_{0i}^2 \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}}^{-\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right) \tag{5.53}$$

gdje je $\boldsymbol{Q}_{v_i v_i}$ kofaktor matrica popravaka **v**. Očekivana vrijednost sume kvadrata popravaka pomnoženih težinom pa se dobije sljedeći izraz :

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sigma_{0i}^2 [n_i - \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{N}_i)] \tag{5.54}$$

gdje je n_i broj mjerenja u i-toj grupi. Ovo se može dokazati ako vrijedi sljedeća jednačina:

$$n_i - \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{N}_i) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{Q}_{v_i v_i}\right) = r_i \tag{5.55}$$

Prema tome, r_i je jednak doprinosu prekobrojnosti mjerenja pojedine grupe mjerenja, procjena varijanc faktora σ_{0i}^2 je:

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{v}_i}{r_i} \tag{5.56}$$

za $i = 1, \dots, m$.

Očito je, da jednačinu (5.56) veoma lahko primijeniti za računanje, ne treba uvodi dodatno računanje doprinosa prekobrojnosti, koje je zahtijevana u obradi podataka za otkrivanje grubih grešaka ili analizi pouzdanosti. Općenito, svi algoritmi za procjenu komponenti varijance (Bähr, Altamimi, & Heck, 2007) trebaju dovoljan broj prekobrojnih mjerenja.

5.3.2 Ebnerova metoda

Metoda po Ebneru (1972) i Kogoj (1992) izvedena je iz metode najmanjih kvadrata. Izvedena je na primjeru izravnanja posrednih opažanja.

A posteriori ocjena tačnosti je interpretirana kao raširena metoda najmanjih kvadrata, kod koje je pored procjene popravaka $\boldsymbol{v}$ i nepoznatih parametara $\boldsymbol{x}$ također procijenjuju i σ^2 varijance opažanja. Pretpostavljene varijance su grupirane. Teoretska vrijednost $\tilde{\sigma}_i^2$ grupe, treba primijeniti za računanje njene procijenjene vrijednosti σ_i^2

$$\mathrm{E}\left(\sigma_i^2\right) = \tilde{\sigma}_i^2 \tag{5.57}$$

Jednačina (5.57) zahtijeva da procjena varijanci bude nepomjerena. Kovarijanc matrica nekoreliranih opažanja grupiranih varijanci ima oblik (Kogoj, 1992):

$$\boldsymbol{Q}_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \boldsymbol{I}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_i^2 \boldsymbol{I}_i & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m^2 \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

Najbolje je izravnanje izvesti po metodi posrednih opažanja. Za ovaj standardni problem, moguće je po Kubiku (1967), (1970) i Kogoj (1992) pomoću iteracijskog postupka procijeniti vrijednosti varijanci pojedinačnih grupa opažanja. Iteracijski proces je konačan kada se za sve elemente S_i dobije vrijednost nula. Dobiju se najvjerovatnije vrijednosti:

$$S_{i,n} = \boldsymbol{v}_{i,n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_{i,n} - n_i \sigma_{i,n}^2 + \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{N}_v^{-1} \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right) = 0 \tag{5.59}$$

i

$$S_{i,n+1} = 0 \qquad dp_{i,n+1} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{i,n+1}^2 = \sigma_{i,n}^2 \tag{5.60}$$

Kubik je jednačine (5.59) i (5.60) izveo na osnovu metode maksimalne pouzdanosti i pod pretpostavkom o normalnoj razdiobi opažanja. Jednačina je lahko izvedena direktno iz zakona o razdiobi grešaka i bez ograničenja normalne razdiobe.

Za kovarijanc matricu strukture kao u jednačini (5.58) za grupe opažanja dobije se sljedeći izraz:

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{vv})_i = \sum_{j=1}^{n_i} \sigma^2 v_{ij} = n_i \sigma_i^2 - \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}_i \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{ll}^{-1} \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right) \tag{5.61}$$

Varijance $\sigma^2 v_{ij}$ popravaka empirijski lahko se odredi iz izraza:

$$\sigma^2 v_{ij} = \mathrm{E}\left(\left(v_{ij} - \mathrm{E}(v_{ij})\right)^2\right) \tag{5.62}$$

Ako opažanja nisu opterećena grubim greškama, za sve v_{ij} vrijedi sljedeće:

$$\mathrm{E}(v_{ij}) = 0 \tag{5.63}$$

Pa za $\sigma^2 v_{ij}$ vrijedi:

$$\sigma^2 v_{ij} = v_{ij}^2 \tag{5.64}$$

Jednačina (5.61) potom prelazi u izraz:

$$\sum_{j=1}^{n_i} \sigma^2 v_{ij} = \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}^2 = n_i \sigma_i^2 - \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}_i \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{ll}^{-1} \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right) \tag{5.65}$$

Jednačina (5.65) ima isti značaj kao jednačina (5.59).

5.3.3 AUE procjena

Približno nepristrana AUE (Almost Unbiased Estimation) metoda je razvijena kao alternativa MINQUE procjeni komponenti varijance, koja zahtijeva potpunu inverziju matrice normalnih jednačina iz metode najmanjih kvadrata. Osim toga, moguće je da pod nekim uslovima MINQUE metoda daje nepristrane vrijednosti, odnosno da su procjene komponente varijance negativne(Fotopoulos, 2003).

Negativne vrijednosti komponenti mogu se javitiiz sljedećih razloga, kako to navodi Sjöberg (1984):

- nedovoljan broj opažanja u odnosu na broj nepoznatih – tj. mala prekobrojnost,
- nekorektan stohastički model i
- nepodesne inicijalne vrijednosti.

Skoro nepristrana procjena, iliAUE metoda, namijenjena je da reducira ogromne zahtjeve računanja kod procjene komponenti varijance, kako jeopisano u Horn i dr. (1975), a alternativnu formulu za AUE metodu je dao Hsu (1999). U svome radu Hsu (2001) pokazao je da je Helmert - ova metoda identična sa IAUE metodom.Ova metoda implementirana je formulom (Horn i dr., 1975), a koja također predstvalja iterativni postupak:

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{l}}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{R} \boldsymbol{Q}_i)} \tag{5.66}$$

5.4 Izbor kriterija

Izbor odgovarajuće metode procjene trebalo bi da se oslanja na željene osobine procjene, kao što su invarijantnost, nepristranost, minimalna varijanca, ne-negativnost, računska efikasnost i itd. U nekim slučajevima, sve navedene osobine ne mogu biti ispunjene, pa se treba odlučiti koja od njih će biti žrtvovana. U principu, pri donošenju odluke o osobinama procjene, mora se odlučivati od slučaja do slučaja, a u zavisnosti od podataka i specifičnosti aplikacije.

Danas je najčešće tražena osobina računarska efikasnost zbog velike količine podaka koji se mogu koristiti za procjenu komponenti variajnace. Glavna kritika tradicionalnim procjenama komponeti varijance je potreba za ponovljanjem inverzije velikih matrica.

Drugi aspekt, koji treba uzeti u obzir prilikom odabira odgovarajuće metode procjene je pitanje da li se radi o balansiranim ili neuravnoteženim podacima. Sve metode zahtijevaju da podaci budu grupisani ili klasifikovani po nekom atributu koji karakteriše varijancu. Ova klasifikacija podataka može se izvršiti u skladu s vrstom ili po kvaliteti podataka. Ako u svakoj grupi podataka ima isti broj opažanja, onda su one uravnotežene i lakše je dobiti procjenu komponenti. Međutim, uravnoteženi podaci su rezultat dizajniranih eksperimenata i rijetko se sreću u praksi. U većini slučajeva radi se o neuravnoteženim podacima, što opet znači da je dužina bar jednog vektora grupe opažanja različita od bar jednog vektora neke druge grupe opažanja.

5.5 Sažetak

Proces izravnanja geodetskih podataka baziran je na modelu opažanja i uglavnom se sastoji od dva matematička modela. S jedne strane, to je funkcionalni model koji definiše matematičke relacije između nepoznatih parametara i opažanja, zajedno s pravilno modeliranim sistematskim uticajima. Druga komponenta svakog izjednačenja metodom najmanjih kvadrata je definisanje realnog stohastičkog modela u formi varijanc kovarijanc matrice, koja opisuje greške funkcionalnog modela, a koje su po svojoj prirodi slučajnog karaktera. Stohastički model prostornog 3D izravnanja heterogenog vektora opažanja, koji sadrži pravce *p*, dužine d_{TPS}, dužine iz GNSS opažanja d_{GNSS}, zenitne udaljenosti *z*, visinske razlike iz trigonometrijskog nivelmana Δh i koordinatne razlike Δy, Δx i ΔH dat je izrazom (Bähr i dr., 2007):

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{C}_l = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1} \qquad (5.67)$$

gdje je $\boldsymbol{C}_l$ uopšteno varijanc kovarijanc matrica. Matrica $\boldsymbol{P}$ je blok dijagonalna matrica težina i inverzija simetrične pozitivno definitne kofaktor matrice je $\boldsymbol{Q}$**.** Varijanc faktor σ_0^2 je a priori odabran i obično se usvaja da je jedan.

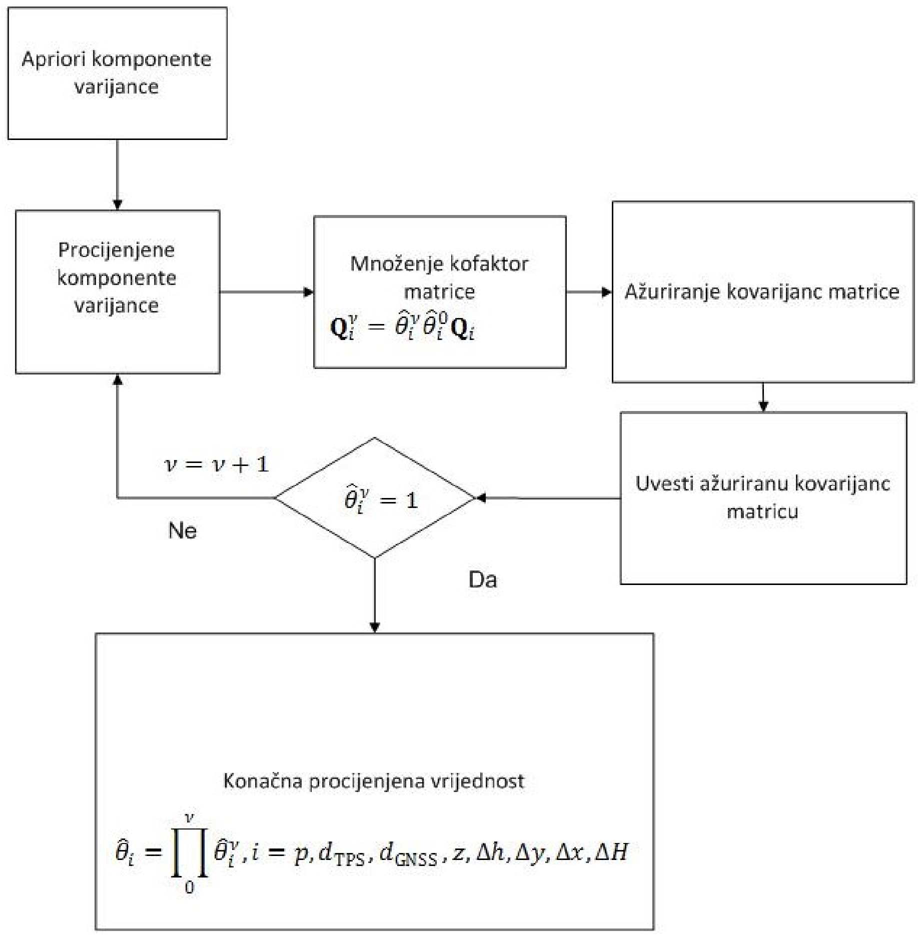
Odgovarajući a posteriori varijanc faktor $\hat{\sigma}_0^2$ se može izračunati primjenom jednačine (3.21), a na osnovu vektora popravaka iz izravnanja i koristiće se modifikacijom a priori varijanc kovarijanc matrice. Međutim, stohastički model predstavljen gore jednačinom (5.67) često nije precizan ili čak može biti i nekorektan pa ima direktan uticaj na rezultate procjene. Klasični stohastički model dozvoljava samo, kako je to već ranije rečeno, jedan zajednički varijanc faktor kovarijanc matrice. Ako postoje opažanja različitog tipa, kao u ovom slučaju, jedan varijanc faktor nije dovoljan da poboljša kvalitetu kovarijanc matrice. Stoga je veoma važno, primijeniti dobro poznate statističke alate procjene komponenti varijance, gdje je moguće procijeniti komponente varijance svake grupe opažanja.

Činjenica je da kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{C}_l$ mora biti bar približno poznata prilikom primjene algoritama za procjenu komponenti varijance. Ova matrica za početna računanja se izvede na osnovu početnih vrijednosti $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$ nepoznatih komponenti varijance. Međutim, nedostatak dobre procjene bi trebao biti razlog za poticaj imlementacije procjene komponenti varijance. Prema tome, različite metode procjene su samo lokalno najbolji procjenitelji, koji obezbjeđuju komponente varijance ovisne o izboru a priori varijanc faktora.

Iterativni pristupi, mogu kompenzirati ovaj problem. Oni pružaju globalno najboljeg procjenitelja, manje ovisnog od početnih procjena nepoznatih komponenti varijance. Ovo je posebno važno ako je početna procjena nepouzdana ili neizvjesna. Na Slika 5-1 dat je pregled iteracijskog postupka korištenog za metode procjene komponenti varijance.

Vektor $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ nepoznatih komponenti varijance može da sadrži sljedeće komponente $\hat{\sigma}_p^2, \hat{\sigma}_{d_{\mathrm{TPS}}}^2, \hat{\sigma}_{d\mathrm{GNSS}}^2, \hat{\sigma}_z^2, \hat{\sigma}_{\Delta h}^2, \hat{\sigma}_{\Delta x}^2, \hat{\sigma}_{\Delta y}^2, \hat{\sigma}_{\Delta H}^2$ ili $\hat{\sigma}_{\mathrm{koor}}^2$. A priori komponente varijance $\hat{\theta}_i^0 = \sigma_i^2$ su specificirane početne vrijednosti za svaku grupu mjerenja $i = p, d_{\mathrm{TPS}}, d_{\mathrm{GNSS}}, z, \Delta h, \Delta x, \Delta y, \Delta H$ ili koor. Ove početne približne vrijednosti korištene su u prvoj (početnoj) iteraciji i služe da se izvedu prve komponente varijance $\hat{\theta}_i^{\nu}$ za svaku grupu mjerenja, koja je primjenjena na odgovarajuću kofaktor matricu. Na ovaj način izvrši se ažuriranje kofaktor matrice.

U sljedećoj iteraciji $\nu = \nu + 1$, procjena komponenti varijance je ponovljena definisanjem rezultata procjene iz predhodne iteracije kao a priori vrijednosti, te novi skup komponenti varijance $\hat{\theta}_i^{\nu+1}$ može biti izveden.



Slika 5-1: Iteracijska procedura procjene komponenti varijance (prema (Fotopoulos, 2003))

Kriterij za zaustavljanje iteracionog procesa, za slučaj kada heterogeni vektor sadrži mjerenja: horizontalnih pravaca p, dužina mjerenih elektrooptičkim daljinomjerom d_{TPS}, prostornih dužina dobivenih iz GNSS mjerenja d_{GNSS}, zenitnih udaljenosti z i visinskih razlika iz trigonometrijskog nivelmana Δh, je da se sve procijenjene komponente približe jedinici, kao što pakazuje sljedeći izraz:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^\nu = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_p^\nu \\ \hat{\theta}_{d_{\mathrm{TPS}}}^\nu \\ \hat{\theta}_{d_{\mathrm{GNSS}}}^\nu \\ \hat{\theta}_z^\nu \\ \hat{\theta}_{\Delta h}^\nu \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.68}$$

U slučaju da heterogeni vektor sadrži mjerenja horizontalnih pravaca p, dužina mjerenih elektroptičkim daljinomjerom d, zenitnih udaljenosti z, visinskih razlika iz trigonometrijskog nivelmana $\mathrm{d}h$, te koordinatnih razlika Δ*x*, Δ*y* i Δ*H*, kriterij prekida iteracijskog procesa dat je sa:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{p}^{\nu} \\ \hat{\theta}_{d_{\mathrm{TPS}}}^{\nu} \\ \hat{\theta}_{z}^{\nu} \\ \hat{\theta}_{\Delta h}^{\nu} \\ \hat{\theta}_{\Delta x}^{\nu} \\ \hat{\theta}_{\Delta y}^{\nu} \\ \hat{\theta}_{\Delta H}^{\nu} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.69}$$

Kriterij konvergencije može se ostvariti ako je razlika između dvije susjedne iteracije manja od definirane vrijednosti, npr. odabran u konkretnom slučaju 0,0001:

$$|\boldsymbol{\theta}^{\nu} - \boldsymbol{\theta}^{\nu-1}| < 0{,}0001 \tag{5.70}$$

Uslovna jednačina (5.70) testira se za sve komponente, da bi bili se osiguralo zadovoljenje odabranog kriterija, jer brzina konvergencije nije ista za sve komponente varijance. Na kraju, konačna vrijednost komponenti varijance svake grupe opažanja koja se procjenjuje u n iteracija je (Fotopoulos, 2007):

$$\hat{\sigma}_{i}^{2} = \hat{\theta}_{i} = \prod_{\nu=0}^{n} \hat{\theta}_{i}^{\nu}, \quad i \in [p, d_{\mathrm{TPS}}, d_{\mathrm{GNSS}}, z, \Delta h, \Delta y, \Delta x, \Delta H] \tag{5.71}$$

6 Riješeni primjeri procjene komponenti varijance

U prethodnim poglavljima predstavljen je teoretski pristup i metodologija procjene komponenti varijance različitim metodama za heterogeni vektor mjerenja. Fokus ovog poglavlja je primjeniti predložene metode procjene na komponente varijance na stvarne i simulirane geodetske mreže za određivanje 3D položaja tačaka.

6.1 Izbor metoda

Za praktičnu primjenu procjene komponenti heterogenog vektora u 3D geodetskim mrežama odabrane su metode uz prethodno definirane kriterije.

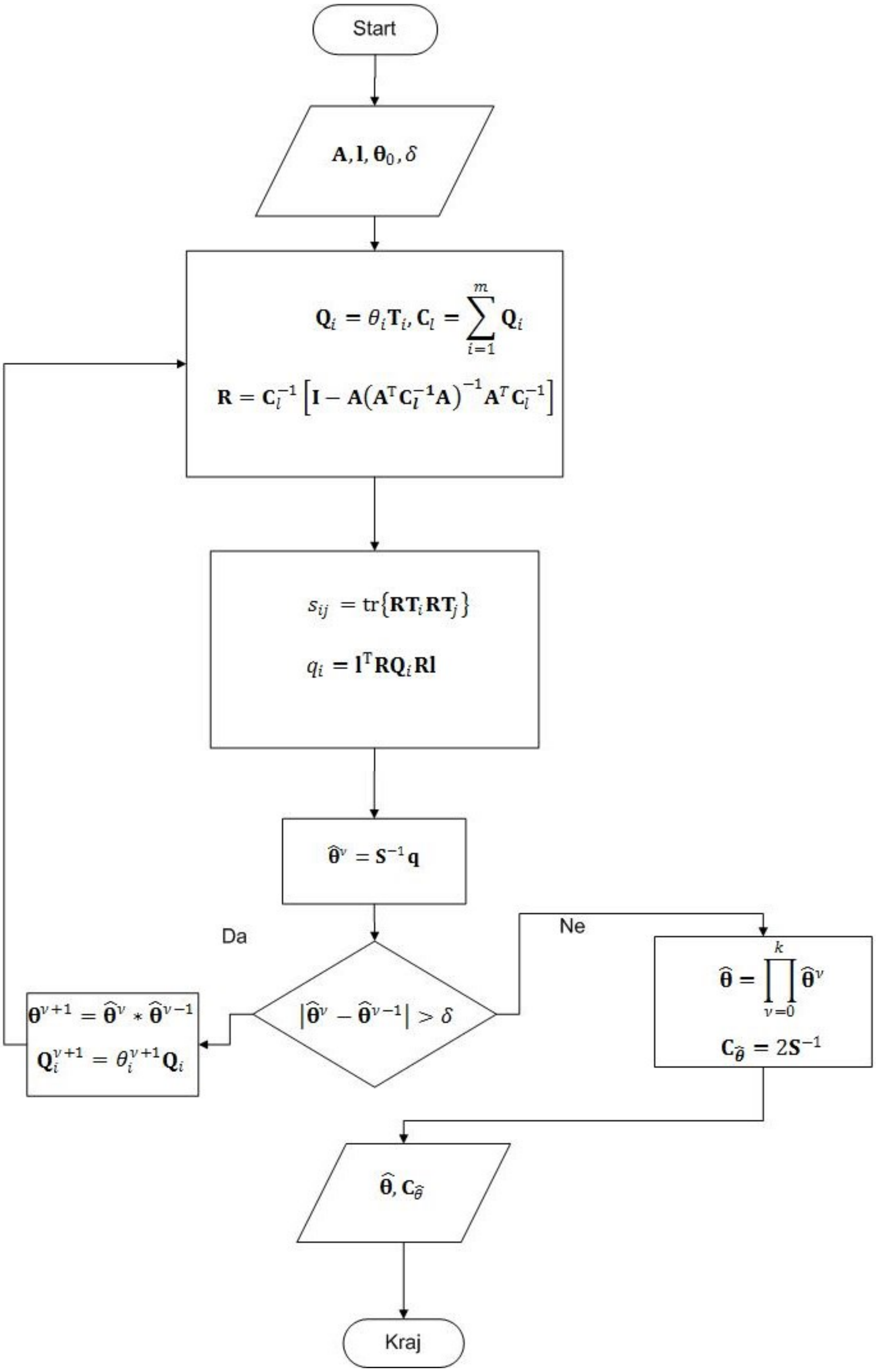
Rješavanje problema procjene komponenti variajnci u geodetskim mrežama zahtijeva korištenje komleksnih matematičkih formula. Za potrebe procjene neophodno je razvijanje algoritama, procedura su iterativne sa velikim brojem računanja s velikom količinom podataka, koji zahtijeva rad sa matricama i ponekad kompleksnim računanjem njihovih inverznih vrijednosti. Problem je dosta pojednostavljen primjenom softverskog paketa MATLAB, koji omogućava korištenje gotovih funkcija. Dobra strana primjene ovog softversko - matematičkog alata je mogućnost pisanja vlastitih funkcija i skripti, što je pomožeu rješavanju postavljenih zadatka.

Računanje komponenti varijance provedeno je u 5 geodetskih mreža. Tri geodetske mreže su sa simuliranim opažanjima ("Kocka", "Soča97" i "Moste"), a dvije mreže sa stvarnim geodetskim mjerenjima ("Pg_Slovenija" i "GFSA").

MINQUE metoda – statistički stroga procjena komponenti varijance, nepristrana, ispunjava uvjet minimalne kvadratne norme. Ova metoda (Slika 6-1 i Tabela 6-1) je primjenljiva na parametarski Gauss–Markov model izravnanja i daje ocjenu tačnosti procijenjenih komponenti varijance.

Tabela 6-1 MINQUE metoda procjene komponenti varijance

Svrha: Ulazni podaci: Izlaz:	Računanje komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = [\theta_1, \dots, \theta_m]$ $\boldsymbol{A}$ **-** dizajn matrica $\boldsymbol{C}_l$ – varijanc kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{Q}_l$ - kofaktor matrica opažanja $\boldsymbol{l}$**–** vektor skraćenih opažanja $\boldsymbol{\theta}_0$ - a priori komponente varijance δ - uvjet konvergencije $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ - a posteriori procijenjene komponente varijance $D(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ - ocjena a posteriori određenih komponenti varijance
1. Formiranje kofaktor matrica za svaku grupu opažanja $\boldsymbol{Q}_i, \boldsymbol{C}_l = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}_i$, *m* – broj grupa opažanja, 2. Računanje matrice $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}_l^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{C}_l^{-1} \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_l^{-1}\right]$ 3. Računanje elemenata matrice $\boldsymbol{S}$, $s_{ij} = \mathrm{tr}\{\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_i \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_j\}$ 4. Računanje elemenata matrice $\boldsymbol{q}$, $q_i = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_i \boldsymbol{R}\boldsymbol{l}$ 5. Procjena komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{q}$ **,** ν - broj iteracije 6. Provjera konvergencije $\left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}\right\| > \delta$ 7. Računanje komponenti varijance za novu iteraciju $\boldsymbol{\theta}^{\nu+1} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}$ 8. Ažuriranje kofaktor matrica $\boldsymbol{Q}_i^{\nu+1} = \theta_i^{\nu+1} \boldsymbol{Q}_i$ 9. Računanje kovarijanc matrice procijenjenih komponenti varijance - $\mathrm{C}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} = 2\boldsymbol{H}^{-1}$	



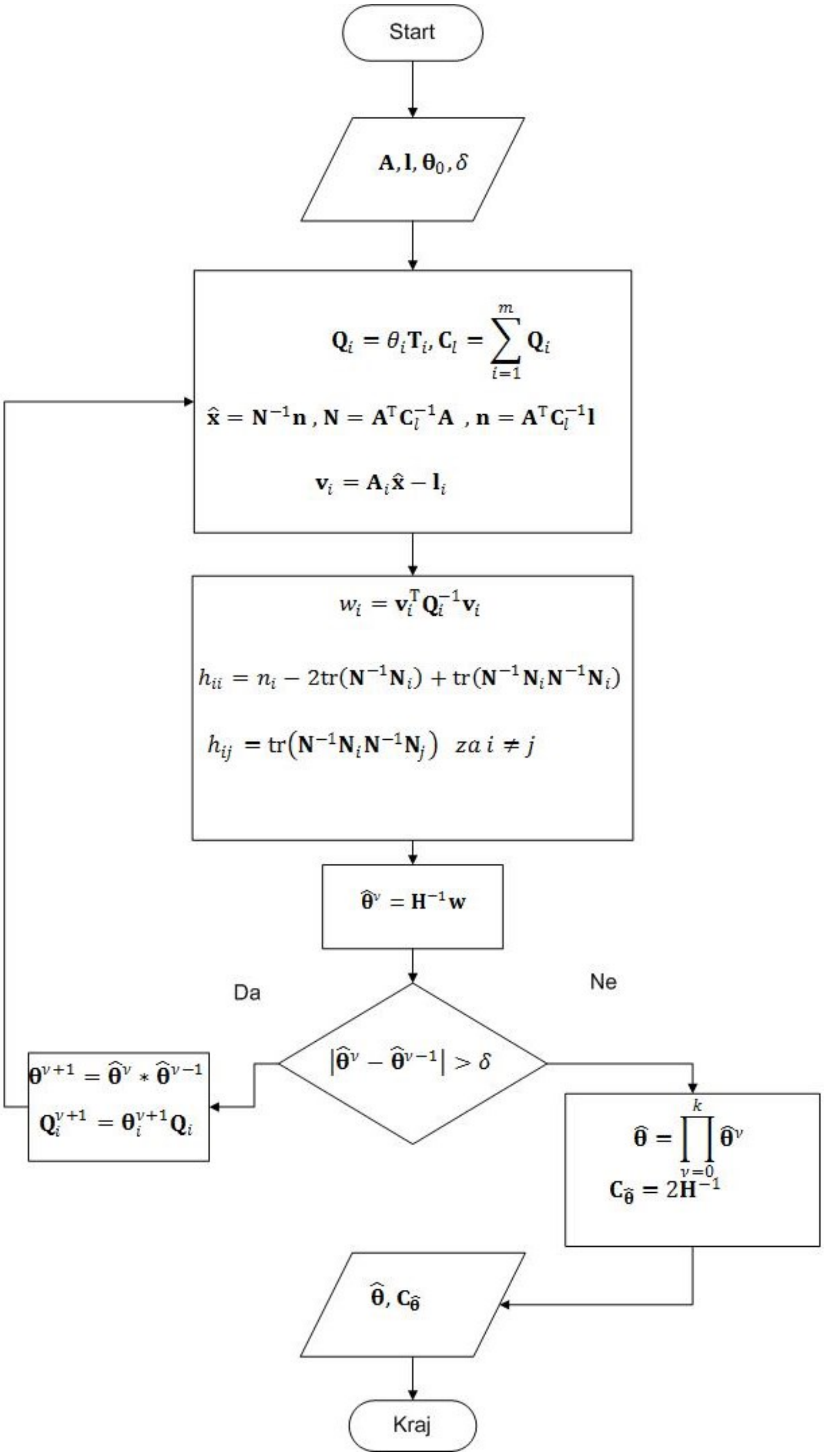
Slika 6-1: Dijagram toka za MINQUE metodu procjene komponenti varijance

Helmertova metoda – statistički stroga procjena komponenti varijance, nepristrana, ispunjava uvjet minimalne kvadratne norme. Ova metoda (Slika 6-2 i Tabela 6-2) primjenljiva na parametarski Gauss – Markov model izravnanja i daje ocjenu tačnosti procijenjenih komponenti varijance.

Tabela 6-2 Helmert - ova metoda procjene komponenti varijance

Svrha:	Računanje komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m]$
Ulazni podaci:	$\boldsymbol{A}$ - dizajn matrica $\boldsymbol{C}_l$ – varijanc kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{Q}_l$ - kofaktor matrica opažanja $\boldsymbol{l}$– vektor skraćenih opažanja $\boldsymbol{\theta}_0$ - a priori komponente varijance δ - uvjet konvergencije
Izlaz:	$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ - a posteriori procijenjene komponente varijance $D(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ - ocjena a posteriori određenih komponenti varijance

1. Računanje kofaktor matrica za svaku grupu opažanja $\boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{C}_l = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}_i$ m – broj grupa opažanja,
2. Formiranje $\boldsymbol{A}_i$ matrica koeficijenata za svaku grupu opažanja, $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i$, m – broj grupa opažanja
3. Računanje matrice normalnih jednačina svake grupe opažanja $\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{N}_i$, m – broj grupa opažanja
4. Procjena nepoznatih parametara $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_l^{-1} \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{l}}^{-1} \boldsymbol{l}$
5. Računanje vektora popravaka za svaku grupu mjerenja $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{A}_i \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}_i$
6. Formiranje Helmertove jednačine $w_i = \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{v}_i$, $h_{ii} = n_i - 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i)$, a $h_{ij} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_j)$ $za\ i \neq j$ za $i, j = 1, \dots, m$.
7. Procjena komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{w}$ **,** ν - broj iteracije
8. Provjera konvergencije $\left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}\right| > \delta$
9. Računanje komponenti varijance za novu iteraciju $\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{\nu+1}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}$
10. Ažuriranje kofaktor matrica $\boldsymbol{Q}_i^{\nu+1} = \theta_i^{\nu+1} \boldsymbol{Q}_i$
11. Računanje kovarijanc matrice procijenjenih komponenti varijance - $\boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} = 2\boldsymbol{H}^{-1}$



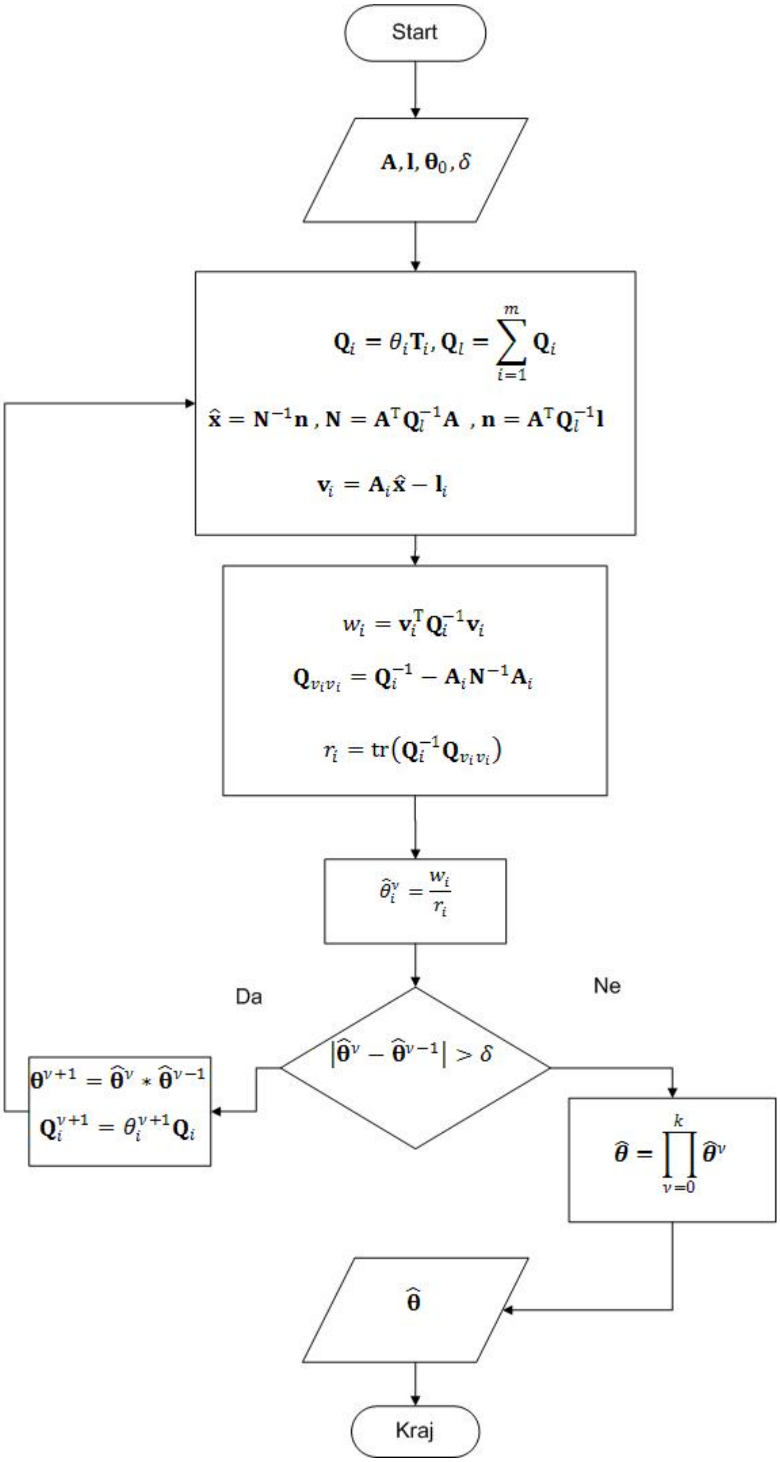
Slika 6-2: Dijagram toka za Helmertovu metodu procjene komponenti varijance

Förstnerova metoda - najpopularnija pojednostavljena metoda razvijena na temelju doprinosa prekobrojnih mjerenja. Nedostatak ove metode (Slika 6-3 i Tabela 6-3) je nemogućnost ocjene procijenjenih komponenti varijance.

Tabela 6-3 Förstner - ova metoda procjene komponenti varijance

Svrha:	Računanje komponenti varijance $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_m]$
Ulazni podaci:	$\boldsymbol{A}$ - dizajn matrica $\boldsymbol{C}_l$ – varijanc kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{Q}_l$ - kofaktor matrica opažanja $\boldsymbol{l}$ – vektor skraćenih opažanja $\boldsymbol{\theta}_0$ - a priori komponente varijance δ - uvjet konvergencije
Izlaz:	$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ - a posteriori procijenjene komponente varijance

1. Računanje kofaktor matrica za svaku grupu opažanja $\boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{C}_l = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}_i$, *m* – broj grupa opažanja,
2. Formiranje $\boldsymbol{A}_i$ matrica koeficijenata za svaku grupu opažanja, $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i$, *m* – broj grupa opažanja
3. Računanje matrice normalnih jednačina svake grupe opažanja $\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{N}_i$, *m* – broj grupa opažanja
4. Procjena nepoznatih parametara $\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_l^{-1} \boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_l^{-1} \boldsymbol{l}$
5. Računanje vektora popravaka za svaku grupu mjerenja $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{A}_i \widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}_i$
6. Računanje matrice $\boldsymbol{Q}_{v_i v_i} = \boldsymbol{Q}_i - \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}_i$
7. Računanje sume kvadrata popravaka $\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{v}_i$
   Računanje r_i koji predstavlja doprinos prekobrojnosti mjerenja pojedine grupe mjerenja $r_i = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{Q}_{v_i v_i}\right)$
8. Procjena komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} = \frac{v_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i^{-1} v_i}{r_i}$, ν - broj iteracije
9. Provjera konvergencije $\left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}\right| > \delta$
10. Računanje komponenti varijance za novu iteraciju $\boldsymbol{\theta}^{\nu+1} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}$
11. Ažuriranje kofaktor matrica $\boldsymbol{Q}_i^{\nu+1} = \theta_i^{\nu+1} \boldsymbol{Q}_i$



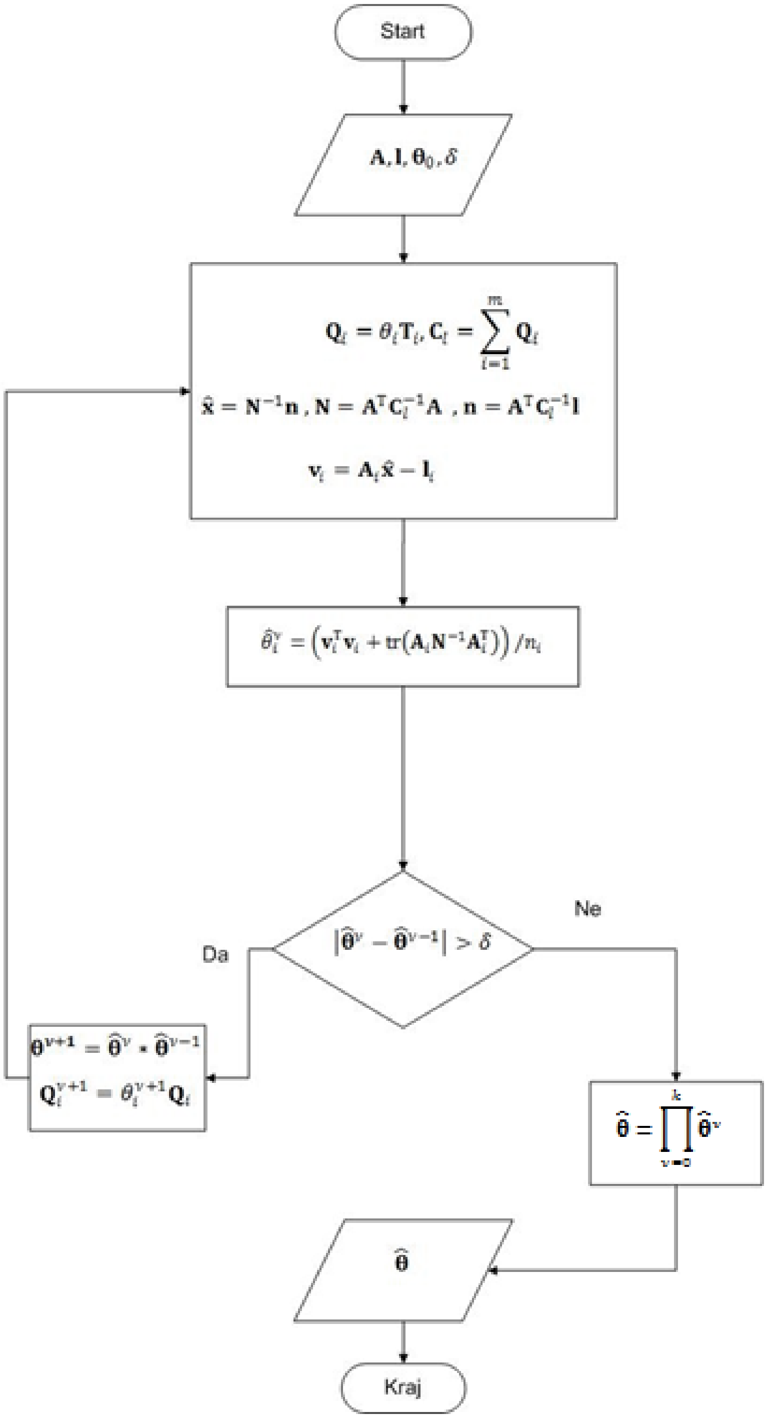
Slika 6-3: Dijagram toka za Förstner ovu metodu procjene komponenti varijance

Ebner ova metoda – pojednostavljena metoda, jednačine izvedene direktno iz zakona o razdiobi grešaka i bez ograničenja normalne razdiobe. Nedostatak metode (Slika 6-4 i Tabela 6-4) je nemogućnost ocjene procijenjenih komponenti varijance.

Tabela 6-4 Ebner - ova metoda procjene komponenti varijance

Svrha:	Računanje komponenti varijance $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_m]$
Ulazni podaci:	$\boldsymbol{A}$ - dizajn matrica $\boldsymbol{C}_l$ – varijanc kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{Q}_l$ - kofaktor matrica opažanja $\boldsymbol{l}$ – vektor skraćenih opažanja $\boldsymbol{\theta}_0$ - a priori komponente varijance δ - uvjet konvergencije
Izlaz:	$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ - a posteriori procijenjene komponente varijance

1. Računanje kofaktor matrica za svaku grupu opažanja $\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_l = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}_i$, *m* – broj grupa opažanja,
2. Formiranje $\boldsymbol{A}_i$ matrica koeficijenata za svaku grupu opažanja, $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i$, *m* – broj grupa opažanja
3. Računanje matrice normalnih jednačina svake grupe opažanja $\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i^{-1}\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{N}_i$, *m* – broj grupa opažanja
4. Procjena nepoznatih parametara $\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{n}$, $\mathbf{N} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_l^{-1}\boldsymbol{A}, \mathbf{n} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_l^{-1}\boldsymbol{l}$
5. Računanje vektora popravaka za svaku grupu mjerenja $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{A}_i\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}_i$
6. Računanje sume kvadrata popravaka $\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i$
7. Procjena komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} = \left(\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i + \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right)\right) / n_i$, ν - broj iteracije
8. Provjera konvergencije $\left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}\right| > \delta$
9. Računanje komponenti varijance za novu iteraciju $\boldsymbol{\theta}^{\nu+1} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu}\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}$
10. Ažuriranje kofaktor matrica $\boldsymbol{Q}_i^{\nu+1} = \theta_i^{\nu+1}\boldsymbol{Q}_i$

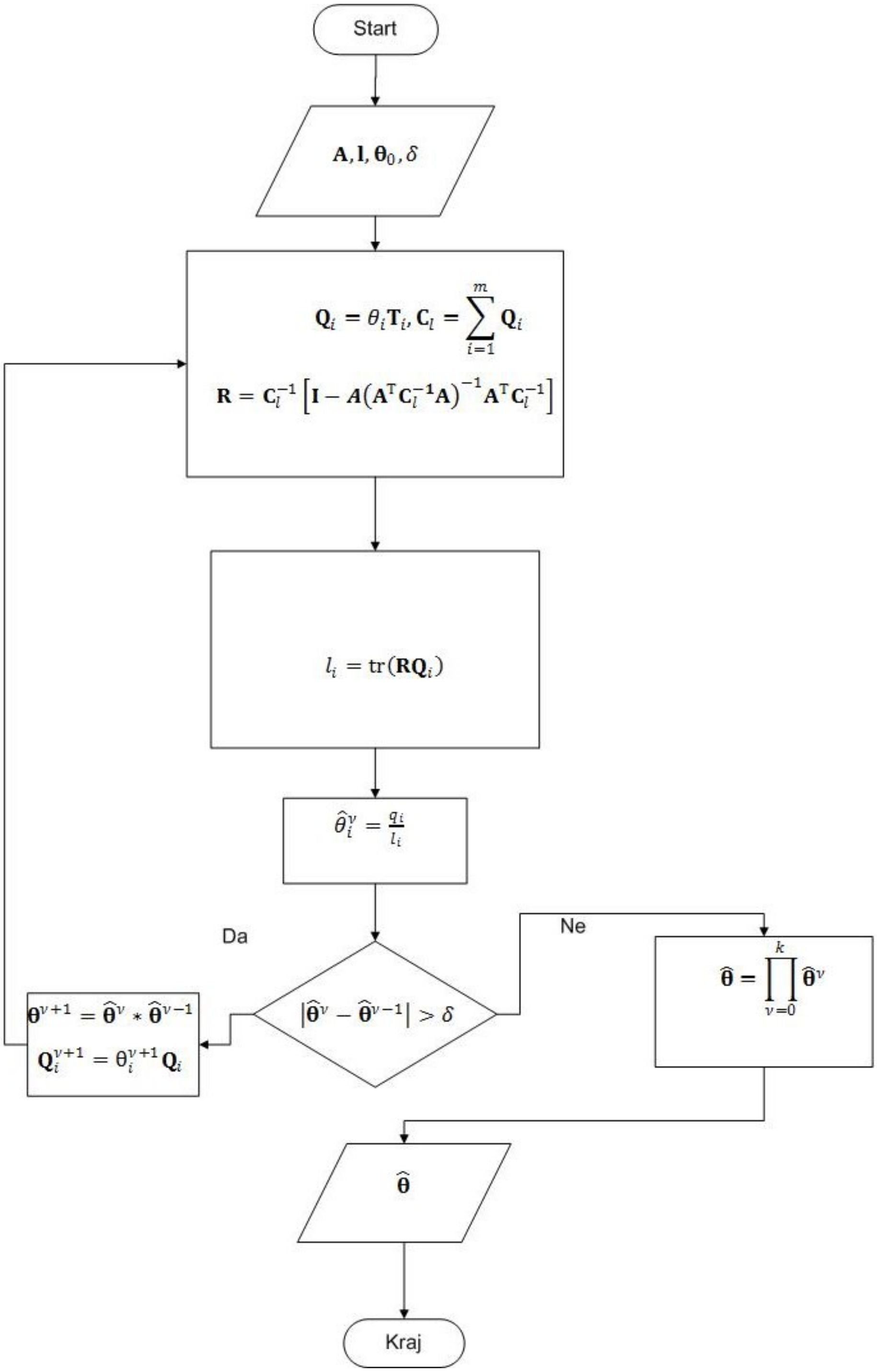


Slika 6-4: Dijagram toka za Ebner - ovu metodu procjene komponenti varijance

AUE – približno nepristana procjena (Slika 6-5 i Tabela 6-5), razvijena je kao alternativa MINQUE metodi procjene komponenti varijance, daje nenegativne procjene komponenti varijance.

Tabela 6-5 AUE metoda procjene komponenti varijance

Svrha: Ulazni podaci: Izlaz:	Računanje komponenti varijance $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_m]$ $\boldsymbol{A}$ - dizajn matrica $\boldsymbol{C}_l$ – varijanc kovarijanc matrica opažanja $\boldsymbol{Q}_l$ - kofaktor matrica opažanja $\boldsymbol{l}$ **–** vektor skraćenih opažanja $\boldsymbol{\theta}_0$ - a priori komponente varijance δ - uvjet konvergencije $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ - a posteriori procijenjene komponente varijance
1. Formiranje kofaktor matrica za svaku grupu opažanja $\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{C}_l = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}_i$, m – broj grupa opažanja, 2. Računanje matrice $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}_l^{-1}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{l}}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_l^{-1}\right]$ 3. Računanje $q_i = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{R}\boldsymbol{l}$ 4. Računanje $l_i = \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}_i)$ 5. Procjena komponenti varijance $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} = \frac{q_i}{l_i}$**,** ν - broj iteracije 6. Provjera konvergencije $\left\lvert\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}\right\rvert > \delta$ 7. Računanje komponenti varijance za novu iteraciju $\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{\nu}+1} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu}\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\nu-1}$ 8. Ažuriranje kofaktor matrica $\boldsymbol{Q}_i^{\nu+1} = \theta_i^{\nu+1}\boldsymbol{Q}_i$	



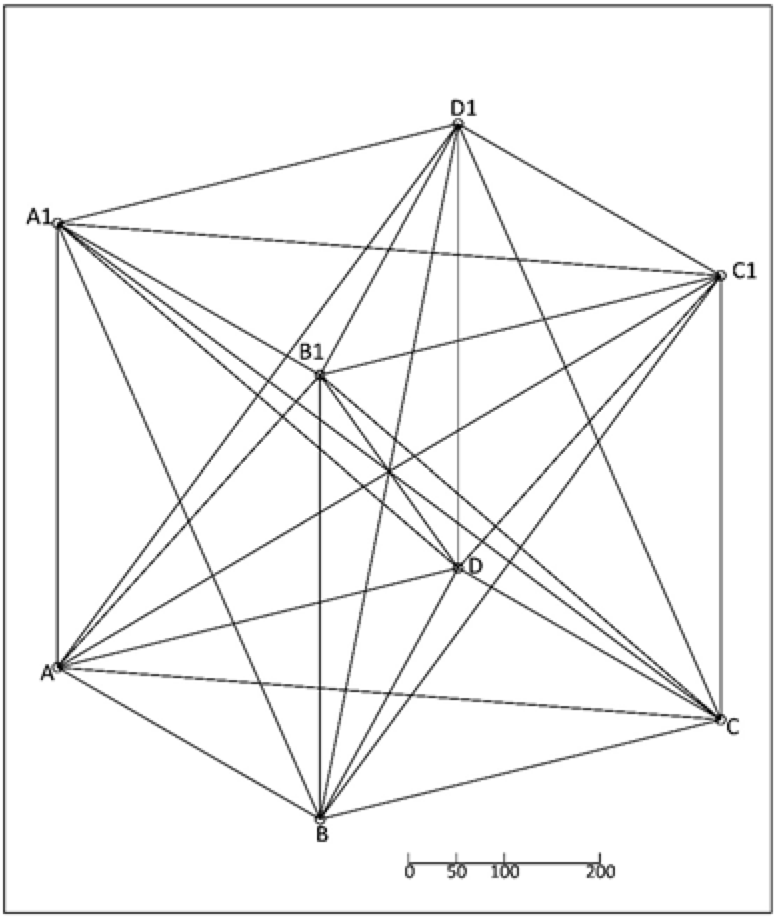
Slika 6-5: Dijagram toka za AUE metodu procjene komponenti varijance

6.2 Konfiguracija primjera geodetskih mreža

Metode a posteriori procjene komponenti varijance primjenjene su na pet geodetske mreže koje su imale različiti heterogeni vektor mjerenja za određivanje 3D (y, x, H) položaja tačaka.

6.2.1 Teoretska mreža 1: "Kocka" – dužina stane 500 m

Teoretska mreža "Kocka" sa stranama dužine 500 m je simulirana geodetska 3D mreža koju čine osam tačaka (Slika 6-6) koje čine geometrijsko tijelo kocku. Heteregoni vektor mjerenja ovdje čine mjerenja horizontalnih pravaca p, dužina d, zenitnih udaljenosti z, visinskih razlika Δh, koordinatnih razlika Δy, Δx i ΔH. Grupe mjerenja su homogene i svaku od navedih mjerenja čini 48 mjerenja.



Slika 6-6: Teoretska mreža "Kocka" – strana 500 m

Približne vrijednosti koordinata tačaka su u Tabela 6-6.

Tabela 6-6 Koordinate tačaka u teoretskoj mreži "Kocka"

Broj tačke	**Koordinate tačaka mreže**		
	y [m]	*x* [m]	*H* [m]
A	100	100	100
B	600	100	100
C	600	600	100
D	100	600	100
A1	100	100	600
B1	600	100	600
C1	600	600	600
D1	100	600	600

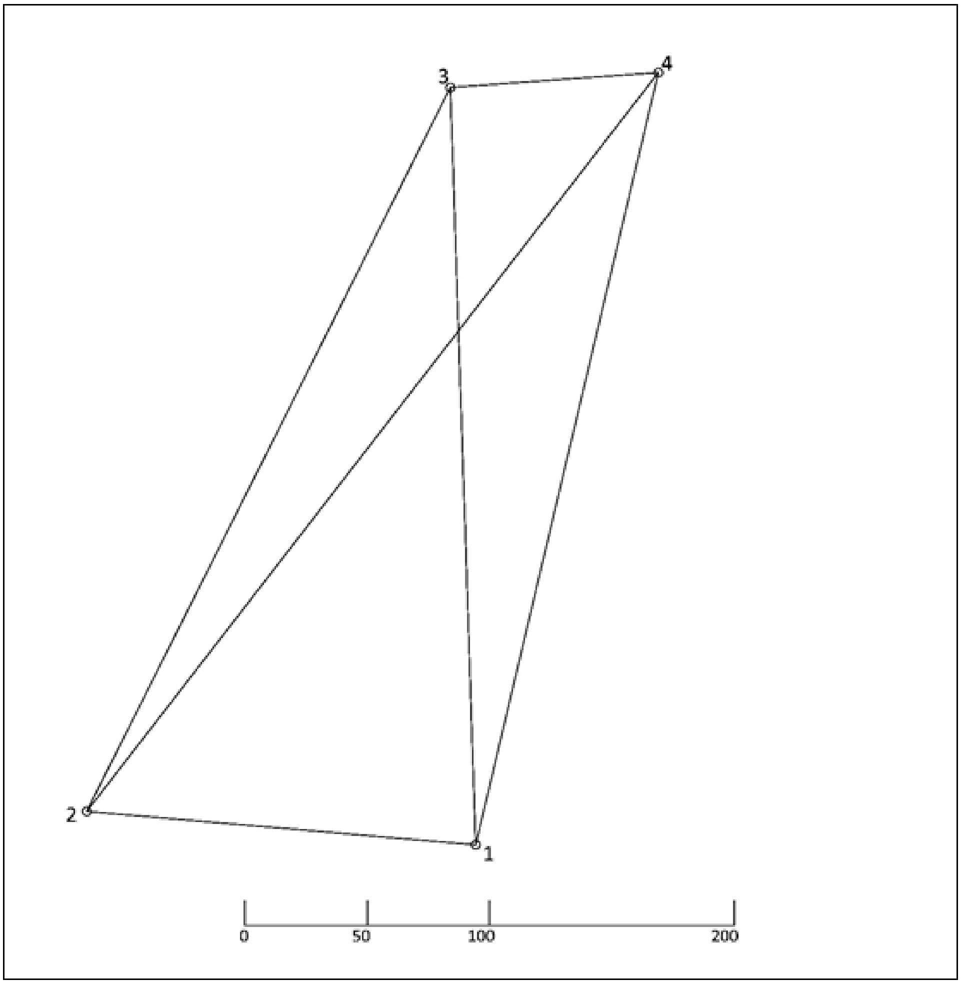
Početne vrijednosti standardnih odstupanja pojedinih grupa mjerenja date su Tabela 6-7:

Tabela 6-7 Početne vrijednosti standardnog odstupanja za a posteriori procjenu – mreža "Kocka"

Opcija	**A priori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	3	3	3	3
3	5	1	1	5	5	5	5
4	3	2	2	5	5	5	5
5	100	10	10	100	100	100	100
6	0.001	0.01	0.01	0.001	0.001	0.001	0.001

6.2.2 Teoretska mreža "Soča97"

Geodetska mreža radnog naslova "Soča97" (Slika 6-7**Error! Reference source not found.**) je simulirana geodetska 3D mreža koju čine četiri geodetske tačke. Heteregoni vektor mjerenja ovdje definišu mjerenja horizontalnih pravaca p, dužina d, zenitnih udaljenosti z, visinskih razlika Δh, koordinatnih razlika Δy, Δx i ΔH. Grupe mjerenja su homogene i svaku grupu čini 12 mjerenja.



Slika 6-7: Teoretska mreža "Soča97"

Približne vrijednosti koordinata tačaka date u Tabela 6-8 Koordinate tačaka u geodetskoj mreži "Soča97".

Tabela 6-8 Koordinate tačaka u geodetskoj mreži "Soča97"

Broj tačke	**Koordinate tačaka mreže**		
	y [m]	*x* [m]	*H* [m]
A	2577.14	1732.65	1234.56
B	2418.25	1746.3	1345.67
C	2566.75	2041.48	1456.78
D	2651.76	2047.6	1567.89

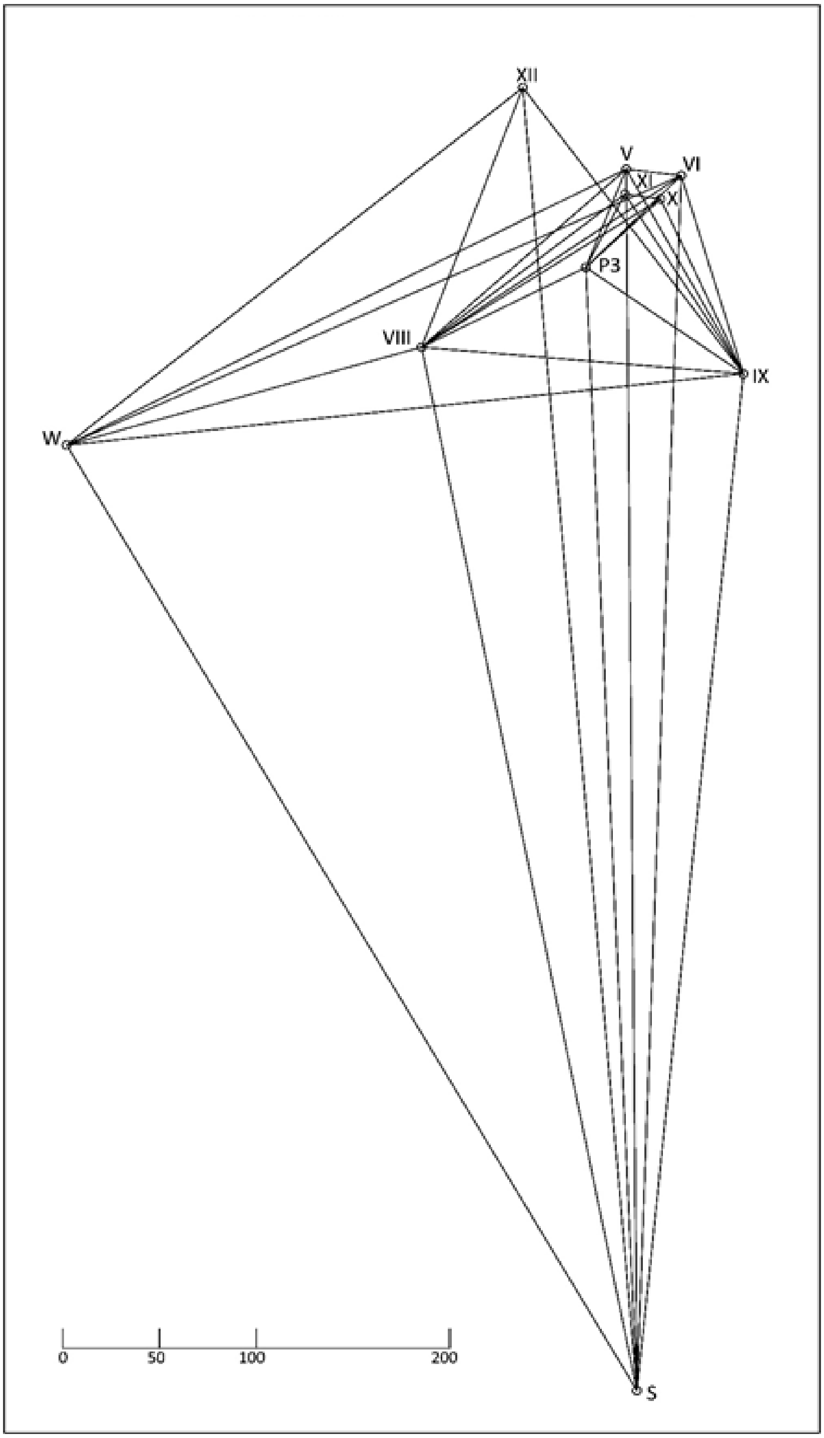
Početne vrijednosti standardnih odstupanja pojedinih grupa mjerenja date su u Tabela 6-9.

Tabela 6-9 Početne vrijednosti standardnog odstupanja za a posteriori procjenu – mreža "Soča97"

Opcija	**A priori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	3	1	1	3	3	3	3
2	1	1	1	1	1	1	1
3	5	2	2	5	5	5	5
4	3	2	2	5	5	5	5
5	100	10	10	100	100	100	100
6	0.001	0.01	0.01	0.001	0.001	0.001	0.001

6.2.3 Simulirana mreža "Moste"

Geodetska mreža radnog naslova "Moste" je simulirana 3D geodetska mreža (Slika 6-8) koju definiše deset geodetskih tačaka. Oblik mreže određen je na osnovu realne mreže "Moste", koja služi za kontrolu stabilnosti visoke vodne pregrade hidrocentrale "Moste" u Sloveniji. Heteregoni vektor mjerenja u ovoj mreži čine mjerenja horizontalnih pravaca p, dužina d, zenitnih udaljenosti z, visinskih razlika Δh, koordinatnih razlika Δy, Δx i ΔH. Grupe mjerenja su homogene i svaku od navedih grupa čine 62 mjerenja.



Slika 6-8: Simulirana mreža "Moste"

Približne koordinate tačaka u geodetskoj mreži "Moste" date su u Tabela 6-10.

Tabela 6-10 Koordinate tačaka geodetske mreže "Moste"

Broj tačke	**Koordinate tačaka mreže**		
	y [m]	x [m]	H [m]
S	33201.4997	40446.4239	520.875
W	32906.7050	40937.9790	568.523
V	33195.9033	41081.3723	518.962
VI	33224.3437	41077.9999	520.112
VIII	33090.1784	40988.8498	525.184
IX	33256.5110	40975.0125	526.960
X	33213.7040	41065.9042	487.405
XI	33195.2804	41068.4344	487.398
XII	33142.5219	41123.7866	531.846
P3	33175.0268	41030.3072	487.393

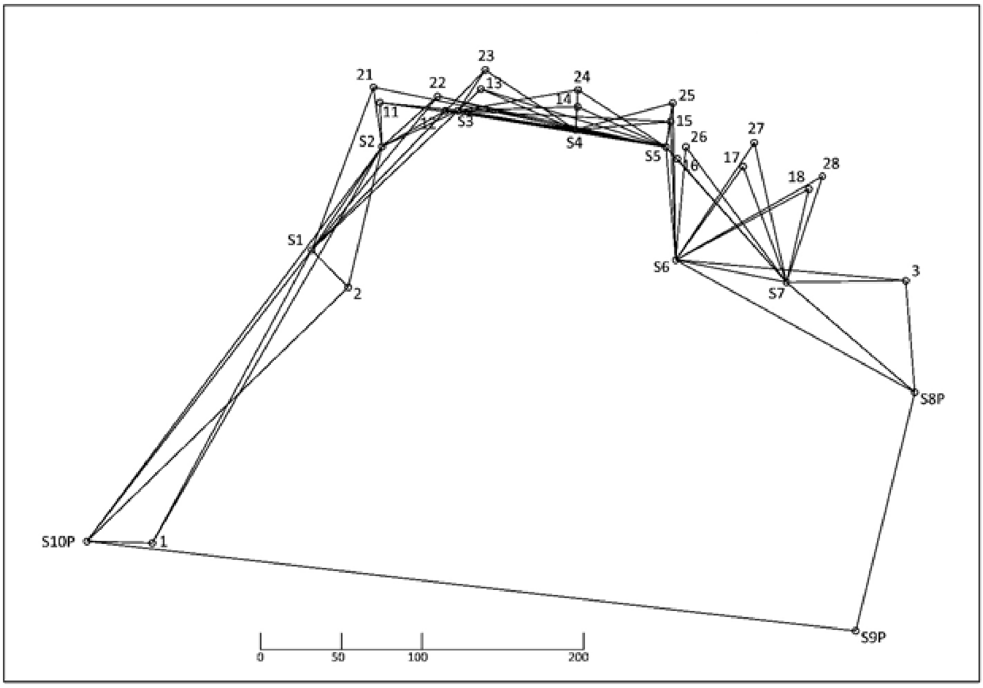
Početne vrijednosti standardnih odstupanja (Tabela 6-11) pojedinih grupa mjerenja date su:

Tabela 6-11 Početne vrijednosti standardnog odstupanja za a posteriori procjenu – mreža "Moste"

Opcija	**A priori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1	1	1	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2	2	2
4	1	0.1	0.1	1	1	1	1
5	100	10	10	100	100	100	100
6	0.001	0.01	0.01	0.001	0.001	0.001	0.001

6.2.4 Mreža "Pg_Slovenija"

Realna geodetska mikrotriangulaciona 3D mreža (Slika 6-9) ustanovljena je u blizini vrtića i osnovne škole Polhov Gradec (u ovom radu nazvana "Pg_Slovenija"). U ovoj mreži su izvedena klasična terestrička geodetska mjerenja. Mreža služi za kontrolu potpornog zida, koji štiti zgradu osnovne škole od nestabilnog kamenjara. Kontrolnu mrežu čini 29 tačaka, od kojih su tri referentne tačke i 26 kontrolnih tačaka. Heterogeni vektor mjerenja, u ovoj geodetskoj mreži čine: 79 horizontalnih pravaca *p*, 69 dužina *d*, 69 zenitnih udaljenosti *z* i 69 visinskih razlika Δh određenih trigonometrijskim nivelmanom.



Slika 6-9: 3D geodetska mreža – "Pg_Slovenija"

Približne vrijednosti koordinata tačaka date su u Tabela 6-12

Tabela 6-12 Koordinate tačaka geodetske mreže "Pg_Slovenija"

Broj tačke	**Koordinate tačaka mreže**		
	y [m]	*x* [m]	*H* [m]
1	6732.9420	2938.0807	75.9434
2	6763.2493	2977.5334	78.3128
3	6849.5001	2978.5497	82.3087
s1	6757.6030	2983.2914	79.2377
s2	6768.4813	2999.2070	82.0307
s3	6780.2567	3004.7611	82.8343
s4	6798.4278	3001.8291	82.7515
s5	6812.4180	2999.1593	82.7350
s6	6813.9251	2981.7517	82.5426
s7	6831.0537	2978.3023	82.6829
s8p	6850.8971	2961.3264	83.2023
s9p	6841.7632	2924.5270	78.1420
s10p	6722.8355	2938.3536	77.0188
11	6768.1806	3006.0172	81.2398
12	6778.3280	3004.7549	81.5222
13	6783.8018	3008.1042	81.5088
14	6798.7284	3005.3770	81.4145
15	6813.1230	3003.0718	81.4989
16	6814.1497	2997.3304	81.4309
17	6824.3325	2996.1419	81.3507
18	6834.5008	2992.6885	81.3588
21	6768.0034	3006.4158	85.9007
22	6778.2605	3005.1266	85.8953
23	6783.9000	3008.5223	86.7407
24	6798.8063	3005.8329	86.7398
25	6813.1264	3003.4843	86.7575
26	6814.2989	2997.7866	85.9572
27	6824.7433	2996.6917	85.9260
28	6835.4618	2992.9701	85.8668

Početne vrijednosti standardnih odstupanja (Tabela 6-13) pojedinih grupa mjerenja date su:

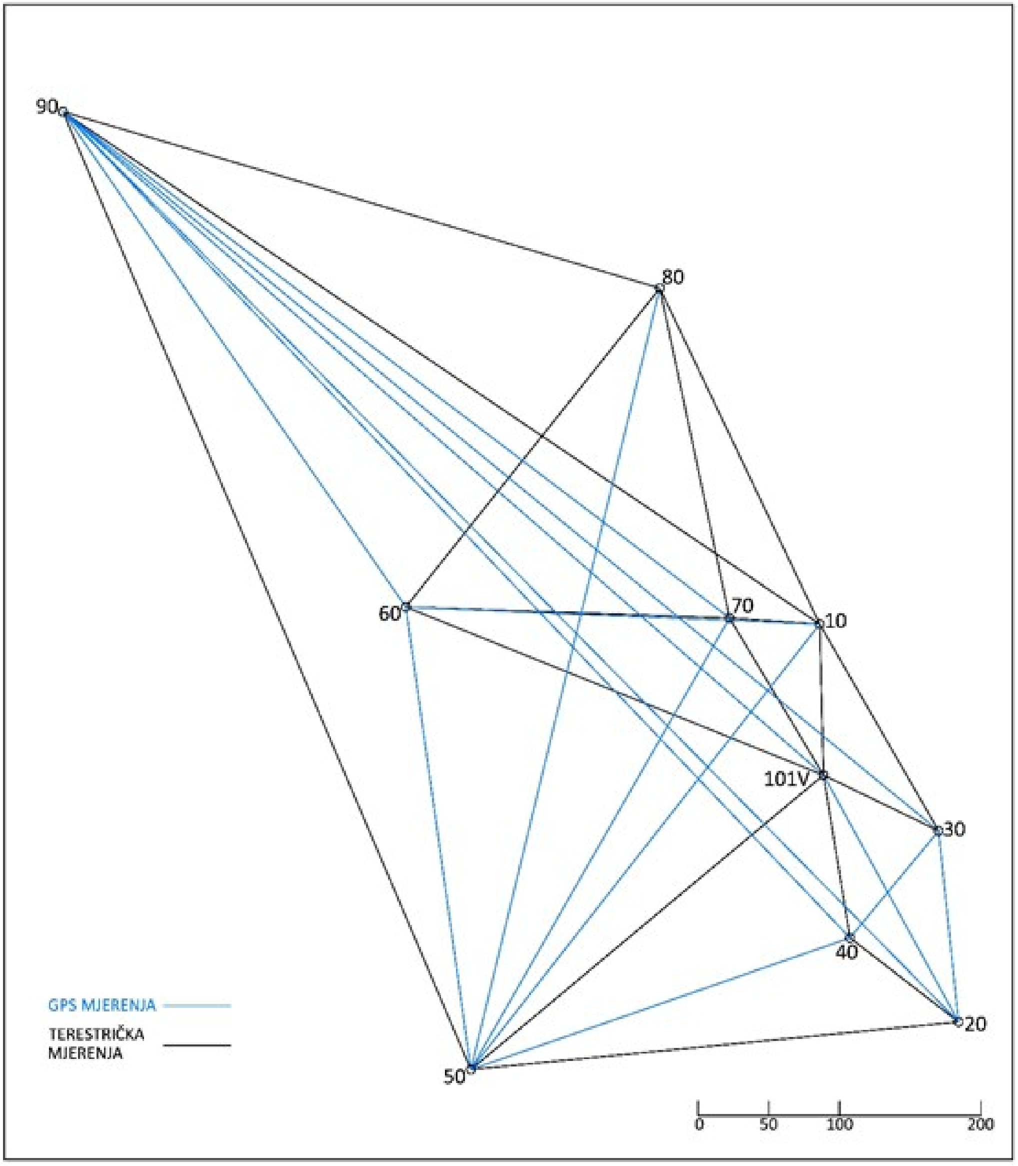
Tabela 6-13 Početne vrijednosti standardnog odstupanja za a posteriori procjenu – mreža „Pg_Slovenije“

Opcija	**A priori standardna odstupanja**			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	0.3	1	1	0.3
2	0.3	0.1	0.1	0.3
3	0.1	0.1	0.1	0.1
4	1	1	1	1
5	100	10	10	100
6	0.001	0.01	0.01	0.001

6.2.5 Mreža "GFSA"

Kontrolna mreža uspostavljena na lokalitetu Građevinskog fakulteta u Sarajevu (u radu nazvana "GFSA") čini deset geodetskih tačaka. Ova mreža razvijena je za potrebe izvođenja praktične nastave za studente Odsjeka za geodeziju. U kontrolnoj mreži (Slika 6-10) izvršena su klasična terestrička mjerenja: horizontalni pravci p, zenitne udaljenosti z, dužine d i visinske razlike trigonometrijskim nivelmanom Δh, te GNSS mjerenja (iz koordinatnih razlika – dužine između tačaka d_{GNSS}).

Heterogeni vektor mjerenja, u ovoj geodetskoj mreži čini, pet naprijed navedenih grupa mjerenja. U mreži su opažana 34 horizontalna pravca p, 17 dužina TPS d_{TPS}, 15 dužina GNSS d_{GNSS}, 20 zenitnih udaljenosti z i 24 visinske razlike određene trigonometrijskim nivelmanom Δh.



Slika 6-10: Geodetska mreža na lokalitetu Građevinskog fakulteta u Sarajevu – "GFSA"

Približne vrijednosti koordinata tačaka geodetske mreže „GFSA" date su u Tabela 6-14

Tabela 6-14 Koordinate tačaka geodetske mreže "GFSA"

Broj tačke	**A priori standardna odstupanja**		
	y [m]	*x* [m]	*H* [m]
10	6533623.150	4858454.850	585.287
20	6533721.240	4858174.390	576.520
30	6533707.160	4858308.980	586.193
40	6533644.560	4858233.500	576.802
50	6533376.676	4858140.748	566.475
60	6533330.720	4858466.900	565.338
70	6533559.440	4858459.150	578.280
80	6533510.210	4858691.690	576.007
90	6533088.390	4858816.114	594.815
101v	6533625.810	4858348.340	580.96

Početne vrijednosti standardnih odstupanja (Tabela 6-15) pojedinih grupa mjerenja date su:

Tabela 6-15 Početne vrijednosti standardnog odstupanja za a posteriori procjenu – mreža "Gfsa"

Opcija	**A priori standardna odstupanja**				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ ["]	s_p ["]	s_z [mm]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	3	5	3	3	5
2	3	5	1	1	5
3	5	3	1	1	3
4	5	5	5	5	5
5	100	10	10	100	100
6	0.001	0.01	0.01	0.001	0.001

6.2.6 Rezultati i analiza

U gore navedenim geodetskim mrežama trebalo je primjenom navedenih metoda (MINQUE, Helmert, Förstner, Ebner i AUE) izvršiti procjenu komponenti varijance pojedinih grupa mjerenja. Kako su metode procjene iteracioni postupci, neophodne su inicijalne (početne) vrijednosti standardnog odstupanja pojedine grupe mjerenja. Za svaku geodetsku mrežu odabrano je po šest opcija a priori standardnog odstupanja pojedinih grupa mjerenja. Ove vrijednosti su navedene u tabelama.

Za *opciju 1* – u realnim geodetskim mrežama „Pg_Slovenija“ (Tabela 6-13) i „GFSA“ (Tabela 6-15) vrijednosti standardnog odstupanja pojedine grupe mjerenja usvojene su na osnovu upotrijebljenog instrumentarija i metode rada (najčešći način). Za teoretsku mrežu “Kocka” (Tabela 6-7), te simulirane mreža “Soča97” (Tabela 6-9) i “Moste” (Tabela 6-11) prije simulacije mjerenja usvojene su vrijednosti a priori standarnog odstupanja za *opciju 1*. *Opcije 2, 3 i 4* su kreirane tako da su vrijednosti iz *opcije 1* na smislen način multiplicirane (bilo uvećane ili umanjene). Na kraju u svrhu eksperimentisanja, *opcije 5 i 6* su uzete kao ekstremni slučajevi, gdje su početne vrijednosti nedvosmisleno puno veće, odnosno puno manje od realnih vrijednosti standarnog odstupanja pojedinih grupa mjerenja.

Zadatak je bio utvrditi :

1) da li je a posteriori procjena komponenti varijance invarijantna na početne inicijalne vrijednosti
2) konačne vrijednosti komponenti varijance
3) broj iteracija
4) uticaj procjene na konačne rezultate procjene nepoznatih – koordinata

1) Invarijantnost na početne vrijednosti

Primjenom naprijed opisanih iteracijskih postupaka na primjerima geodetskih mreža dobiveni su rezultati a posteriori procjene standardnog odstupanja pojedinih grupa mjerenja heterogenog vektora. Rezultati provedenih računanja predstavljeni su tabelarno.

1) Teoretska mreža “Kocka”

Tabela 6-16 A posteriori procjena standardnog odstupanja MINQUE metoda

Opcija	**A posterioristandardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
2	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
3	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
4	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
5	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
6	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623

Tabela 6-17 A posteriori procjena standardnog odstupanja Helmertova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6614
2	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6614
3	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6615
4	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6614
5	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6614
6	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6614

Tabela 6-18 A posteriori procjena standardnog odstupanja Förstnerova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617
2	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617
3	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617
4	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617
5	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617
6	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617

Tabela 6-19 A posteriori procjena standardnog odstupanja Ebnerova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	2.3884	0.7661	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6613
2	2.3884	0.7661	1.1224	3.3897	3.2807	2.7138	2.6614
3	2.3885	0.7661	1.1224	3.3897	3.2806	2.7138	2.6613
4	2.3883	0.7663	1.1225	3.3897	3.2806	2.7138	2.6613
5	2.3883	0.7663	1.1224	3.3897	3.2806	2.7137	2.6613
6	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6613

Tabela 6-20 A posteriori procjena standardnog odstupanja AUE metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	2.3735	0.8523	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
2	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
3	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
4	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
5	2.3739	0.8525	1.1211	3.3896	3.2901	2.7061	2.6622
6	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623

2) Teoretska mreža “Soča97”

Tabela 6-21 A posteriori procjena standardnog odstupanja MINQUE metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	3.0412	1.1714	1.8805	3.2811	2.5750	3.1989	2.8359
2	3.0414	1.1714	1.8806	3.2811	2.5750	3.1986	2.8359
3	3.0414	1.1714	1.8806	3.2811	2.5750	3.1987	2.8359
4	3.0414	1.1714	1.8806	3.2811	2.5750	3.1987	2.8359
5	3.0415	1.1713	1.8806	3.2811	2.5750	3.1984	2.8359
6	3.0415	1.1713	1.8806	3.2811	2.5750	3.1984	2.8359

Tabela 6-22 A posteriori procjena standardnog odstupanja Helmertova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	3.0985	0.8709	1.9064	3.2716	2.5631	3.1483	2.8654
2	3.0987	0.8709	1.9065	3.2717	2.5631	3.1499	2.8654
3	3.0985	0.8709	1.9064	3.2716	2.5631	3.1483	2.8654
4	3.0985	0.8709	1.9064	3.2716	2.5631	3.1483	2.8654
5	3.0985	0.8709	1.9064	3.2716	2.5631	3.1483	2.8654
6	3.0985	0.8709*	1.9064	3.2716	2.5631	3.1483	2.8654

Tabela 6-23 A posteriori procjena standardnog odstupanja Förstnerova metoda

Opcija	**A posteriori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	3.0324	1.2439	1.8772	3.2829	2.5771	3.2102	2.8319
2	3.0321	1.2403	1.8771	3.2830	2.5773	3.2105	2.8318
3	3.0323	1.2423	1.8771	3.2830	2.5772	3.2103	2.8319
4	3.0321	1.2403	1.8771	3.2830	2.5771	3.2105	2.8318
5	Neg.	0.0347	0.2180	0.0325	0.0252	0.0325	0.0300
6	3.0321	1.2407	1.8771	3.2830	2.5773	3.2105	2.8318

Tabela 6-24 A posteriori procjena standardnog odstupanja Ebnerova metoda

Opcija	**A posteriori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	3.0986	0.8697	1.9066	3.2716	2.5630	3.1485	2.8620
2	3.0991	0.8696	1.9068	3.2717	2.5631	3.1470	2.8620
3	3.0985	0.8697	1.9065	3.2716	2.5630	3.1488	2.8620
4	3.0983	0.8698	1.9064	3.2716	2.5631	3.1490	2.8620
5	3.0983	0.8698	1.9064	3.2716	2.5631	3.1490	2.8620
6	3.0989	0.8696	1.9067	3.2717	2.5630	3.1478	2.8620

Tabela 6-25 A posteriori procjena standardnog odstupanja AUE metoda

Opcija	**A posteriori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	3.0986	0.8697	1.9066	3.2716	2.5630	3.1485	2.8620
2	3.0991	0.8696	1.9068	3.2717	2.5631	3.1470	2.8620
3	3.0985	0.8697	1.9065	3.2716	2.5630	3.1488	2.8620
4	3.0983	0.8698	1.9064	3.2716	2.5631	3.1490	2.8620
5	3.0983	0.8698	1.9064	3.2716	2.5631	3.1490	2.8620
6	3.0989	0.8696	1.9067	3.2717	2.5630	3.1478	2.8620

3) Simulirana geodetska mreža “Moste”

Tabela 6-26 A posteriori procjena standardnog odstupanja MINQUE metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1.0136	0.8980	1.0493	2.0157	2.0979	1.8986	1.8967
2	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
3	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
4	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
5	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
6	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967

Tabela 6-27 A posteriori procjena standardnog odstupanja Helmertova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973
2	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973
3	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973
4	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973
5	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973
6	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973

Tabela 6-28 A posteriori procjena standardnog odstupanja Förstnerova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1.0135	0.8749	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968
2	1.0135	0.8749	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968
3	1.0135	0.8749	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968
4	1.0135	0.8749*	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968
5	1.0135	0.8749*	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968
6	1.0135	0.8749	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968

Tabela 6-29 A posteriori procjena standardnog odstupanja Ebnerove metode

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1.0134	0.8163	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972
2	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972
3	1.0134	0.8163	1.0494	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972
4	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972
5	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972
6	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972

Tabela 6-30 A posteriori procjena standardnog odstupanja AUE metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
1	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
2	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
3	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
4	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
5	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967
6	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967

4) Geodetska mreža “Pg_Slovenija”

Tabela 6-31 A posteriori procjena standardnog odstupanja MINQUE metoda

Opcija	A posteriori standardna			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
2	0.2702*	1.3164	1.4148	0.2561
3	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
4	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
5	0.2702*	1.3164	1.4148	0.2561
6	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561

Tabela 6-32 A posteriori procjena standardnog odstupanja Helmertova metoda

Opcija	A posteriori standardna			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	0.2739	1.1217	1.4252	0.2568
2	0.2740	1.1217	1.4252	0.2568
3	0.2740	1.1217	1.4252	0.2568
4	0.2740	1.1217	1.4252	0.2568
5	0.2740*	1.1217	1.4252	0.2568
6	0.2740	1.1217	1.4252	0.2568

Tabela 6-33 A posteriori procjena standardnog odstupanja Förstnerova

Opcija	A posteriori standardna			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	0.2654	1.6884	1.4029	0.2550
2	0.2655	1.6884*	1.4029	0.2550
3	0.2655	1.6884*	1.4029	0.2550
4	0.2655	1.6884	1.4029	0.2550
5	0.2655	1.6884*	1.4029	0.2550
6	0.2655	1.6884	1.4029	0.2550

Tabela 6-34 A posteriori procjena standardnog odstupanja Ebnerova metoda

Opcija	A posteriori standardna			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	0.2740	1.1215	1.4252	0.2568
2	0.2740	1.1216	1.4252	0.2568
3	0.2740	1.1216	1.4252	0.2568
4	0.2740	1.1219	1.4252	0.2568
5	0.2740	1.1219	1.4252	0.2568
6	0.2740	1.1219	1.4252	0.2568

Tabela 6-35 A posteriori procjena standardnog odstupanja AUE metoda

Opcija	**A posteriori standardna**			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
2	0.2702	1.3164	1.4148	0.2560
3	0.2702	1.3164	1.4148	0.2560
4	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
5	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
6	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561

5) Geodetska mreža “GFSA”

Tabela 6-36 A posteriori procjena standardnog odstupanja MINQU metoda

Opcija	**A posteriori standardna odstupanja**				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	5.2744	6.2905	1.9988	4.5297	3.2973
2	5.2744	6.2905	1.9987	4.5297	3.2973
3	5.2745	6.2903	1.9987	4.5297	3.2973
4	5.2745	6.2903	1.9987	4.5296	3.2973
5	5.2745	6.2904	1.9987	4.5297	3.2973
6	5.2745	6.2904	1.9987	4.5297	3.2973

Tabela 6-37 A posteriori procjena standardnog odstupanja Helmertova metoda

Opcija	**A posteriori standardna odstupanja**				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	5.6589	6.3618	1.4663	4.5126	3.4018
2	5.6589	6.3618	1.4662	4.5126	3.4018
3	5.6588	6.3618	1.4662	4.5126	3.4019
4	5.6588	6.3618	1.4663	4.5125	3.4018
5	5.6589	6.3618	1.4662	4.5126	3.4019
6	5.6589	6.3618	1.4662	4.5126	3.4019

Tabela 6-38 A posteriori procjena standardnog odstupanja Förstnerova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	5.2522	6.2793	2.0549	4.5946	2.7955
2	5.2523	6.2791	2.0550	4.5946	2.7955
3	5.2526	6.2789	2.0550	4.5946	2.7956
4	5.2528	6.2787	2.0549	4.5946	2.7955
5	5.2524	6.2791	2.0550	4.5946	2.7956
6	5.2528	6.2787	2.0549	4.5946	2.7956

Tabela 6-39 A posteriori procjena standardnog odstupanja Ebnerova metoda

Opcija	A posteriori standardna odstupanja				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	5.6586	6.3620	1.4660	4.5123	3.4018
2	5.6589	6.3618	1.4660	4.5123	3.4018
3	5.6590	6.3618	1.4660	4.5123	3.4018
4	5.6584	6.3620	1.4663	4.5122	3.4018
5	5.6584	6.3620	1.4663	4.5122	3.4018
6	5.6584	6.3620	1.4663	4.5122	3.4018

Tabela 6-40 A posteriori procjena standardnog odstupanja AUE

Opcija	A posteriori standardna odstupanja				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
1	5.2345	6.2785	2.0897	4.5171	3.4018
2	5.2345	6.2783	2.0897	4.5171	3.4018
3	5.2352	6.2780	2.0897	4.5170	3.4019
4	5.2359	6.2767	2.0898	4.5171	3.4018
5	5.2359	6.2767	2.0898	4.5171	3.4018
6	5.2359	6.2767	2.0898	4.5171	3.4018

Nakon provedenog računanja u pojedinim geodetskim mrežama nameće se nekoliko zaključaka, koji su iznešeni dalje u tekstu.

MINQUE metoda a posteriori procjene standardog odstupanja u mrežama “Kocka”, “Soča97”, “Moste” i “GFSA” za sve opcije početne vrijednosti postiže konvergenciju rezultata. Što se tiče vrijednosti a posteriori procjene daje identične rezultate za komponente heterogenog vektora u pojedinačnim mrežama.

Međutim, u mreži “Pg_Slovenija” u slučaju *opcije 2* i *opcije 5 tokom* iteraciskog postupka pojavljuju se negativne vrijednosti procjene komponente varijance (u tabeli označeno zvjezdicom). Nakon što nije prekinut iteracioni postupak, došlo je do konvergencije i rezultati a posteriori procjene komponenti heterogenog vektora su identični u svim opcijama.

Helmertova metoda a posteriori procjene standardnog odstupanja u mrežama “Kocka”, “Moste” i “GFSA” za sve opcije početnih vrijednosti postiže konvergenciju rezultata. A posteriori procjena standardnog odstupanja komponenti heterogenog vektora mjerenja pojedinih mreža daje identične rezultate. U mreži “Soča97” u slučaju *opcije 6* , te u mreži “Pg_Slovenija”*opcija 5* dolazi do negativne procjene varijance.

Förstnerova metoda a posteriori procjene standardnog odstupanja u mrežama “Kocka” i “GFSA” za sve opcije početnih vrijednosti postiže konvergenciju rezultata, rezultati su identični. U mrži “Soča97”*opcija 5,* mreži “Moste” za *opciju 4* i *opciju 5* te u mreži “Pg_Slovenija” za *opcije 2,3* i *5* javljaju se negativne vrijednosti varijance.

Ebner – ova i AUE metoda u svim mrežama i u svim opcijama početnih vrijednosti postižu konvergenciju rezultata. Konačne vrijednosti standardnog odstupanja su identične.

Konačno, iz analize uticaja početnih vrijednosti na a posteriori procjenu standardnog odstupanja dolazimo do zaključka da kod metoda MINQUE, Helmert i Förstner postoji osjetljivost na početne vrijednost standardnog odstupanja pojedine grupe mjerenja, zbog pojave procjene negativnih vrijednosti komponeti varijance.

2) Konačne vrijednosti standardnog odstupanja grupa mjerenja

Nakon provedenih računanja korištenjem različitih inicijalnih vrijednosti za provođenje iteracionog postupka pojedinih metoda usvojene su konačne vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja pojedinih grupa heterogenog vektora za svih pet geodetskih mreža.

Tabela 6-41 Konačne vrijednosti a posteriori procjene – mreža "Kocka"

Metoda procjene	**A posteriori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
MINQUE	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623
Helmert	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6614
Förstner	2.3821	0.7991	1.1219	3.3896	3.2843	2.7106	2.6617
Ebner	2.3884	0.7662	1.1224	3.3897	3.2807	2.7137	2.6613
AUE	2.3735	0.8526	1.1211	3.3895	3.2904	2.7061	2.6623

Tabela 6-42 Konačne vrijednosti a posteriori – mreža "Soča97"

Metoda procjene	**A posteriori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
MINQUE	3.0985	0.8709	1.9064	3.2716	2.5631	3.1483	2.8654
Helmert	3.0412	1.1714	1.8805	3.2811	2.5750	3.1989	2.8359
Förstner	3.0324	1.2439	1.8772	3.2829	2.5771	3.2102	2.8319
Ebner	3.0986	0.8697	1.9066	3.2716	2.5630	3.1485	2.8620
AUE	3.0413	1.1714	1.8805	3.2811	2.5750	3.1988	2.8359

Tabela 6-43 Konačne vrijednosti a posteriori procjene – mreža "Moste"

Opcija	**A posteriori standardna odstupanja**						
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]	$s_{\Delta x}$ [mm]	$s_{\Delta y}$ [mm]	$s_{\Delta H}$ [mm]
MINQUE	1.0136	0.8980	1.0493	2.0157	2.0979	1.8986	1.8967
Helmert	1.0134	0.8162	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8973
Förstner	1.0135	0.8749	1.0493	2.0157	2.0984	1.8990	1.8968
Ebner	1.0134	0.8163	1.0493	2.0157	2.0996	1.8998	1.8972
AUE	1.0136	0.8980	1.0493	2.0158	2.0979	1.8986	1.8967

Tabela 6-44 Konačne vrijednosti a posteriori procjene – mreža "Pg_Slovenija"

Opcija	A posteriori standardna odstupanja			
	s_d [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
MINQUE	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561
Helmert	0.2739	1.1217	1.4252	0.2568
Förstner	0.2654	1.6884	1.4029	0.2550
Ebner	0.2740	1.2115	1.4252	0.2568
AUE	0.2702	1.3164	1.4148	0.2561

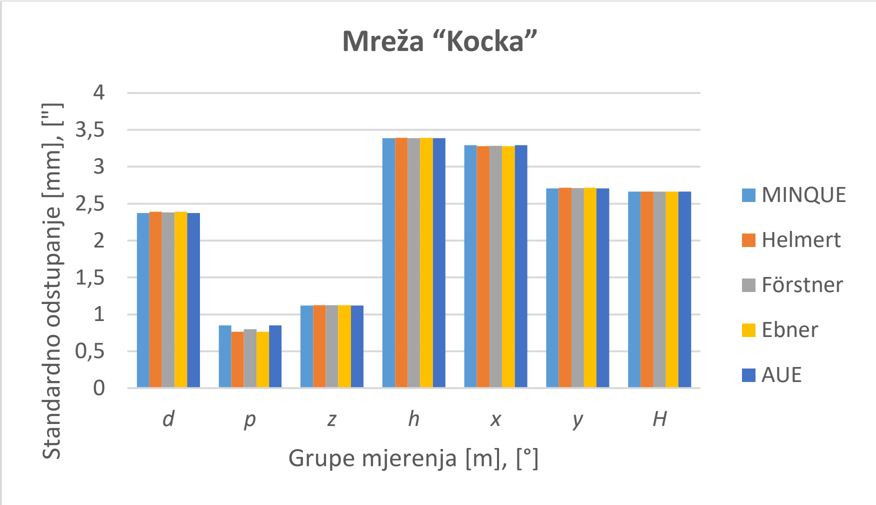
Tabela 6-45 Konačne vrijednosti a posteriori procjene – mreža "GFSA"

Opcija	A posteriori standardna odstupanja				
	$s_{d_{\mathrm{TPS}}}$ [mm]	$s_{d_{\mathrm{GNSS}}}$ [mm]	s_p ["]	s_z ["]	$s_{\Delta h}$ [mm]
MINQUE	5.2744	6.2905	1.9988	4.5297	3.2973
Helmert	5.6589	6.3618	1.4663	4.5126	3.4018
Förstner	5.2522	6.2793	2.0549	4.5946	2.7955
Ebner	5.6586	6.3620	1.4660	4.5123	3.4018
AUE	5.2345	6.2785	2.0897	4.5171	3.4018

Zbog jasnijeg uvida i jednostavnije analize rezultati su predstavljeni i grafički.

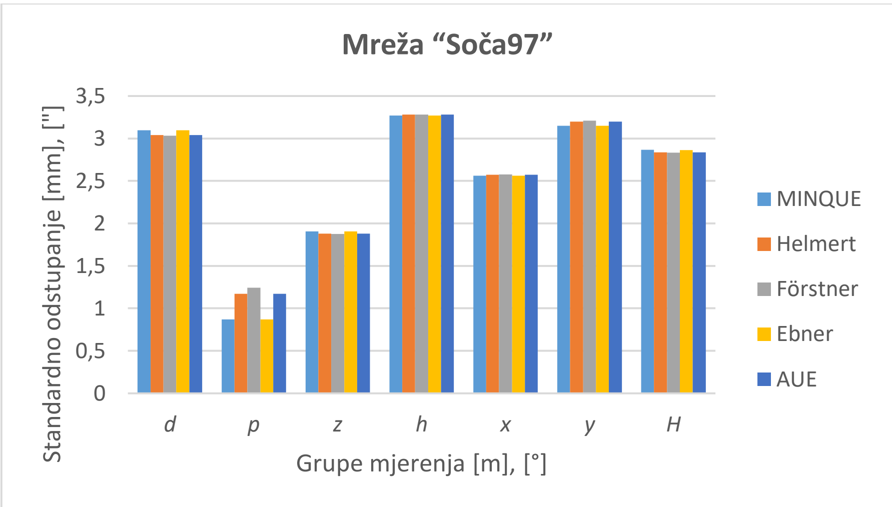
Jasno je uočljivo (vidi Slika 6-11), na kojoj su prikazan rezultati konačnih vrijednosti a posteriori procjene komponenti varijance vektora mjerenja u geodetskoj mreži „Kocka“. Svih pet metoda daje skoro identičan rezultat, razlika se pojavljuje na trećoj decimali iza zareza, kod procjene za zenitnu udaljenost *z*, visinsku razliku Δ*h*, koordinatne razlike Δ*x* i Δ*H*. Kod procjene standardnog odstupanja dužine *d*, i koordinatne razlike Δ*y* razlike se javljaju na drugoj decimali iza zareza.

Na kraju treba primijetiti nešto značajnije kolebanje rezultata kod procjene standardnog odstupanja horizontalnih pravaca *p*. Maksimalna razlika koja se pri tome javlja je od 0,09 sekundi. Potrebno je istaći da za sve komponente heterogenog vektora metode MINQUE i AUE, kao i Helmert ova i Ebnerova metoda daju identične rezultate, respektivno.



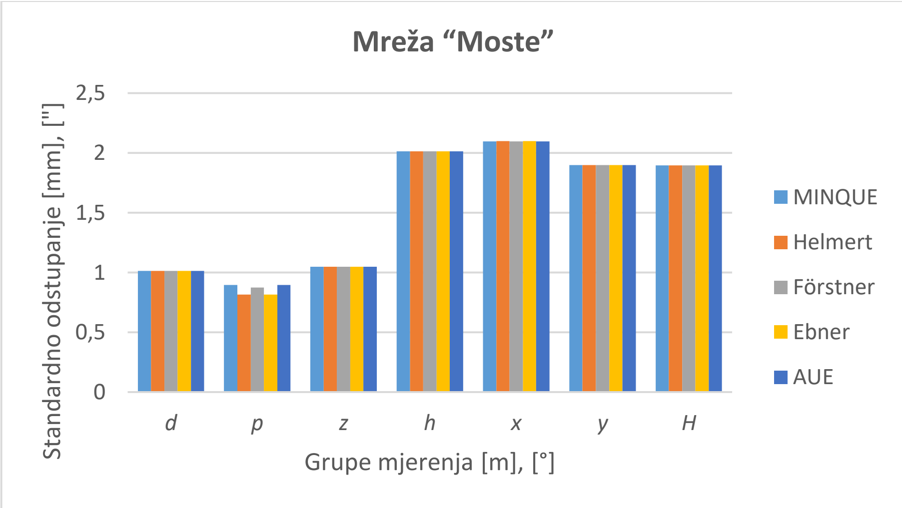
Slika 6-11: Konačne vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja grupa mjerenja u mreži "Kocka"

U geodetskoj mreži "Soča97", jasno se uočava s grafikona (Slika 6-12) da procjena standardnog odstupanja pravaca *p* ima različite vrijednosti, a najveća razlika je 0,37 sekunde. Za sve komponete heterogenog vektora u ovoj mreži rezultati a posteriori procjene za Helmertovu i AUE metodu su identični, a za Förstnerovu metodu razlika je na trećoj decimali iza zareza.



Slika 6-12: Konačne vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja grupa mjerenja u mreži "Soča97"

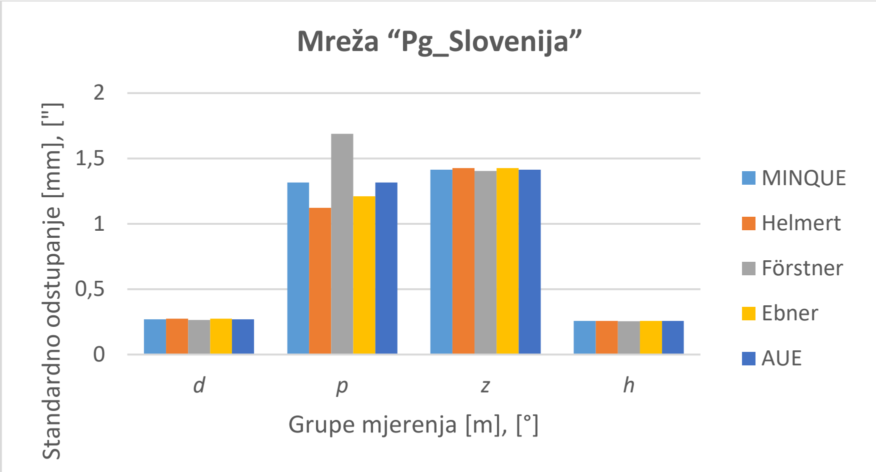
U geodetskoj mreži “Moste”, vidljivo je s grafikona (Slika 6-13), da procjena standardnog odstupanja pravaca *p* ima različite vrijednosti procjene, najveća razlika je 0,08 sekundi. za ostale komponente heterogenog vektora sve metode daju identičan rezultat.



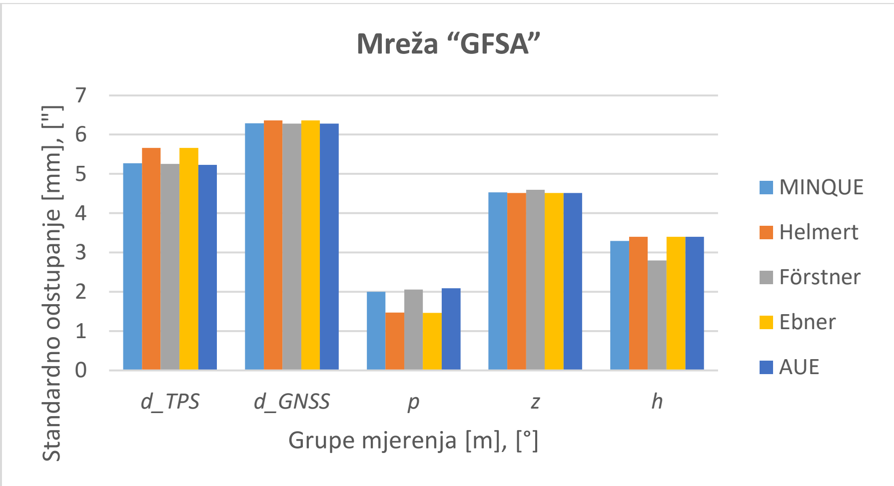
Slika 6-13: Konačne vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja grupa mjerenja u mreži “Moste”

S grafikona (Slika 6-14) vidimo, kao i u prethodnim primjerima, da je najveća oscilacija u procjeni konačne vrijednosti standardnog odstupanja za komponetu horizontalni pravac *p*, čija je maksimalna razlika 0,48 sekundi. Za sve komponente heterogenog vektora MINQUE i AUE metoda, kao i Helmertova i Ebnerova metode daju identičan rezultat.

U geodetskoj mreži “GFSA“ vektor mjerenja čini pet nehomogenih grupa mjerenja. Grafikon (Slika 6-15) pokazuje slično kao u prethodnim slučajevima, da za grupu mjerenja koju čine pravaci *p* postoje različite procjene vrijednosti a posteriori standardnog odstupanja. Međutim, može se primjeti da postoji razlika u rezultatima procjene i kod ostalih komponeti vektora. Za sve komponente heterogenog vektora Helmertova i Ebnerova metoda daju identičan rezultat.



Slika 6-14: Konačne vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja grupa mjerenja u mreži “Pg_Slovenija”



Slika 6-15: Konačne vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja grupa mjerenja u mreži “GFSA”

Ukratko se rezultati mogu sažeti: oscilacije u simuliranim mrežama javljaju se samo u grupi horizontalnih pravaca, isti je slučaj je u primjeru mreže “Pg_Slovenija”. U mreži “GFSA” sa realno izvedenim terenskim mjerenjima različite konačne vrijednosti procjene su u zavisnosti od primjenjene metode, javljaju se za sve grupe izuzev zenitne udaljenosti *z*. Razlike nisu značajne, ali teoretski uticaj na konačne vrijednosti je nepoznat.

3) Broj iteracija

U procesu istraživanja invarijantnosti rezultata a posteriori procjene standardnog odstupanja komponenti heterogenog vektora evidentiran je broja koraka neophodnih za postizanje kriterija konvergencije rezultata datih jednačinom (5.70). Pregled rezultata o broju iteracijskih koraka dat je tabelarno.

Tabela 6-46 Broj iteracija – mreža "Kocka"

Opcija	Broj iteracija				
	MINQUE	Helmert	Förstner	Ebner	AUE
1	5	5	5	6	5
2	6	5	6	6	6
3	6	4	5	6	5
4	5	4	6	6	5
5	5	5	6	8	4
6	6	4	6	6	7

Tabela 6-47 Broj iteracija – mreža "Soča97"

Opcija	Broj iteracija				
	MINQUE	Helmert	Förstner	Ebner	AUE
1	6	8	17	9	7
2	8	5	17	8	7
3	7	8	17	10	7
4	7	8	17	8	6
5	7	8	74*[3]	11	7
6	8	10	14	10	7

Tabela 6-48 Broj iteracija – mreža "Moste"

Opcija	Broj iteracija				
	MINQUE	Helmert	Förstner	Ebner	AUE
1	4	4	4	4	4
2	5	4	5	6	5
3	5	4	5	6	5
4	5	5	6*	6	4
5	5	5	6	8	4
6	6	5	6	7	6

[3] Tokom iteracijskog postupka pojava procjene negativnih varijanci

Tabela 6-49 Broj iteracija – mreža "Pg_Slovenija"

Opcija	Broj iteracija				
	MINQUE	**Helmert**	**Förstner**	**Ebner**	**AUE**
1	5	6	6	11	7
2	7*	8	11*	15	7
3	5	7	9*	15	7
4	6	7	6	14	8
5	9*	18*	11*	20	8
6	6	7	6	13	8

Tabela 6-50 Broj iteracija – mreža "GFSA"

Opcija	Broj iteracija				
	MINQUE	**Helmert**	**Förstner**	**Ebner**	**AUE**
1	8	11	11	17	11
2	9	11	11	17	11
3	8	10	11	17	10
4	8	11	9	16	7
5	8	10	12	18	11
6	8	11	9	12	7

U teoretskoj simuliranoj mreži - "Kocka" sve metode procjene su u svim opcijama postigle konvergenciju rezultata. Najmanji broj iteracija (Tabela 6-46) za postizanje konvergencije bilo je potrebno Helmertovoj metodi, a neznatno veći broj Ebnerovoj metodi, devet iteracija. Potrebno je primijetiti da početne vrijednosti nisu značajno uticale na broj potrebnih za konvergenciju.

U geodetskoj simuliranoj mreži "Soča97", najmanji broj iteracija potreban (Tabela 6-47) je za AUE metodu, koja je pokazala i neovisnost o početnim vrijednostima. Najveći broj iteracija zahtijevala je Förstnera metoda, a potom Ebnerova metoda, u slučaju *opcije 5,* 74 iteracije. Treba naglasiti, u ovoj geodetskoj mreži Förstnerova metoda je pokazala oteženo postizanje konvergencije rezultata, zbog negativnih vrijednosti procjene.

Uvidom u rezultate (Tabela 6-48), u simuliranoj mreži "Moste"nameće se zaključak da je došlo do brzog postizanja konvergencije rezultata, da su razlike između pojedinih metoda minimalne, a da početne vrijednosti iteracionog postupka ne utiču značajnije na brzinu konvergencije. Za postizanje konvergencije rezultata Helmertovoj metodi potreban je najmanji broj iteracionih koraka, slijedi je AUE metoda. Za postizanje konvergencije najveći broj koraka potreban je Ebnerovoj metodi. U slučaju početnih vrijednosti iz *opcije 4*, kod Förstnerove metode pojavile su se negativne vrijednosti procjene varijance, ali nije došlo do povećanja broja iteracija.

Geodetska mreža “Pg_Slovenija”, mreža koju čini heterogeni vektor sa stvarnim geodetskim preciznim mjerenjima. Uvidom u rezultate (Tabela 6-49) konvergencija rezultata postignuta za metoda AUE i Ebner, bez obzira na početnu vrijednost. Najveći broj koraka zahtijeva Ebnera metoda.

Geodetsku mrežu “GFSA”, također čini stvarni heterogeni vektor nehomogenih grupa mjerenja. Uvidom u rezultate (Tabela 6-50) uočava se da su sve metode postigle konvergenciju rezultata. Najveći broj iteracija potreban je MINQUE, a najmanji broj iteracija Ebnerovoj metodi. Na kraju, treba naglasiti da nema značajnije promjene broja iteracija usljed promjene početnih vrijednosti iteracionog postupka.

4) Uticaj procjene na konačne rezultate procjene nepoznatih – koordinata

Metodama a posteriori procjene komponenti varijance određen je stohastički model. Međutim, postavlja se logično pitanje: kako konačni rezultati a posteriori procjene standardnih odstupanja pojedinih metoda utiču na konačne koordinate nepoznatih tačaka? Da li su razlike značajne?

Na ova pitanja najlakše je odgovoriti tako da se dobivene razlike uporede sa standardnim odstupanjem koordinata pojedinih tačaka. Razlike koordinata se pomnožene s faktorom 2,5 (95% vjerovatnoća) i ako je ovaj iznos veći od standardnog odstupanja, onda se ova razlika koordinata smatra statistički značajnom.

a) Geodetska mreža „Kocka“

Tabela 6-51 Razlike koordinata tačaka između pojedinih metoda –mreža “Kocka”

Broj tačke	*Razlike koordinata tačaka*									
	$x_M - x_H$ [mm]	$x_M - x_F$ [mm]	$x_M - x_E$ [mm]	$x_M - x_A$ [mm]	$x_H - x_F$ [mm]	$x_H - x_E$ [mm]	$x_H - x_A$ [mm]	$x_F - x_E$ [mm]	$x_F - x_A$ [mm]	$x_E - x_A$ [mm]
X_A	-0.20	-0.12	-0.20	0	0.01	0.09	0.20	-0.08	0.12	0.20
Y_A	0.13	0.08	0.14	0	0.01	-0.05	-0.13	0.06	-0.08	-0.14
H_A	0.02	0.01	0.03	0	0.00	-0.01	-0.02	0.01	-0.01	-0.03
X_B	-0.24	-0.14	-0.23	0	0.00	0.10	0.24	-0.09	0.14	0.23
Y_B	0.10	0.06	0.11	0	0.01	-0.04	-0.10	0.04	-0.06	-0.11
H_B	0.03	0.02	0.03	0	0.00	-0.01	-0.03	0.01	-0.02	-0.03

X_C	-0.29	-0.17	-0.29	0	0.00	0.12	0.29	-0.12	0.17	0.29
Y_C	0.12	0.07	0.12	0	0.01	-0.04	-0.12	0.05	-0.07	-0.12
H_C	0.02	0.02	0.03	0	0.00	-0.01	-0.02	0.01	-0.02	-0.03
X_D	-0.25	-0.14	-0.24	0	0.01	0.10	0.25	-0.10	0.14	0.24
Y_D	0.15	0.10	0.16	0	0.01	-0.05	-0.15	0.07	-0.10	-0.16
H_D	0.03	0.02	0.03	0	0.00	-0.01	-0.03	0.01	-0.02	-0.03
X_{A1}	-0.25	-0.15	-0.25	0	0.01	0.11	0.25	-0.10	0.15	0.25
Y_{A1}	0.12	0.08	0.13	0	0.01	-0.04	-0.12	0.05	-0.08	-0.13
H_{A1}	0.03	0.02	0.03	0	0.00	-0.01	-0.03	0.01	-0.02	-0.03
X_{B1}	-0.19	-0.11	-0.18	0	0.00	0.08	0.19	-0.07	0.11	0.18
Y_{B1}	0.13	0.08	0.14	0	0.01	-0.05	-0.13	0.06	-0.08	-0.14
H_{B1}	0.02	0.01	0.02	0	0.00	-0.01	-0.02	0.01	-0.01	-0.02
X_{C1}	-0.16	-0.09	-0.16	0	0.01	0.07	0.16	-0.06	0.09	0.16
Y_{C1}	0.14	0.09	0.15	0	0.01	-0.05	-0.14	0.06	-0.09	-0.15
H_{C1}	0.03	0.02	0.03	0	0.00	-0.01	-0.03	0.01	-0.02	-0.03
X_{D1}	-0.18	-0.10	-0.17	0	0.01	0.07	0.18	-0.07	0.10	0.17
Y_{D1}	0.14	0.09	0.15	0	0.01	-0.05	-0.14	0.06	-0.09	-0.15
H_{D1}	0.03	0.02	0.03	0	0.00	-0.01	-0.03	0.01	-0.02	-0.03

Tabela 6-52 Procjena tačnosti položaja tačaka – mreža "Kocka"

Broj tačke	**Metoda a posteriori procjene**				
	MINQUE [mm]	**Helmert** [mm]	**Förstner** [mm]	**Ebner** [mm]	**AUE** [mm]
s_{X_A}	0.7730	0.7728	0.7730	0.7728	0.7730
s_{Y_A}	0.7674	0.7666	0.7672	0.7666	0.7674
s_{H_A}	0.5580	0.5581	0.5580	0.5581	0.5580
s_{X_B}	0.8380	0.8343	0.8371	0.8343	0.8381
s_B	0.7363	0.7348	0.7359	0.7348	0.7363
s_B	0.5809	0.5810	0.5809	0.581	0.5809
s_{X_C}	0.7662	0.7647	0.7658	0.7647	0.7662
s_{Y_C}	0.7119	0.7095	0.7112	0.7095	0.7119
s_{H_C}	0.5191	0.5191	0.5191	0.5191	0.5192
s_{X_D}	0.7686	0.7668	0.7681	0.7668	0.7685
s_{Y_D}	0.7181	0.7153	0.7174	0.7153	0.7181
s_{H_D}	0.5196	0.5196	0.5196	0.5196	0.5196
$s_{X_{A1}}$	0.7626	0.7617	0.7624	0.7617	0.7626
$s_{Y_{A1}}$	0.6985	0.6975	0.6982	0.6975	0.6985

s_{A1}	0.5122	0.5123	0.5122	0.5123	0.5122
$s_{X_{B1}}$	0.7752	0.7737	0.7748	0.7737	0.7752
$s_{Y_{B1}}$	0.7035	0.7012	0.7029	0.7012	0.7035
s_{B1}	0.5209	0.5209	0.5209	0.5209	0.5209
$s_{X_{C1}}$	0.7532	0.7529	0.7531	0.7529	0.7532
$s_{Y_{C1}}$	0.7023	0.7009	0.7019	0.7009	0.7023
$s_{H_{C1}}$	0.5027	0.5027	0.5027	0.5027	0.5027
$s_{X_{D1}}$	0.7521	0.7519	0.7521	0.7519	0.7521
$s_{Y_{D1}}$	0.6969	0.6959	0.6966	0.6959	0.6969
$s_{H_{D1}}$	0.5024	0.5025	0.5024	0.5025	0.5024

Metode MINQUE i AUE imaju identičnu a posteriori procjenu standardnog odstupanja, odnosno težina pojedinih grupa mjerenja, tako da ne postoji razlika između konačnih koordinata traženih parametara. Ostale metode su dale veoma sličnu a posteriori procjenu, razlike su bile na trećoj ili četvrtoj decimali iza zareza. Najveća razlika između koordinata (Tabela 6-51) javlja se kod tačke C za koordinatu x, u iznosu 0.29 mm. Razlika se pojavljuje između MINQUE i Ebner – ove, Helmert – ove i AUE metode te Ebner – ove i AUE metode.

Procijenjena položajna tačnost tačke C nakon primjene težina grupa dobivenih a posteriori procjenom MINQUE i AUE metode za koordinate je $s_{\mathrm{X_C}}$=0.7662 mm, $s_{\mathrm{Y_C}}$=0.7119 mm i $s_{\mathrm{H_C}}$=0.5191 mm. Procijenjena položajna tačnost tačke C nakon primjene rezultata a posteriori procjene Helmertove i Ebnerove metode je $s_{\mathrm{X_C}}$=0.7647 mm, $s_{\mathrm{Y_C}}$=0.7095 mm i $s_{\mathrm{H_C}}$=0.5191 mm. Procjene položajne tačnosti poslije primjene Förstnerove metode a posteriori procjene je $s_{\mathrm{X_C}}$=0.7658 mm, $s_{\mathrm{Y_C}}$=0.7112 mm i $s_{\mathrm{H_C}}$=0.5191 mm. Na osnovu ovih rezultata zaključuje se da je položajna tačnost za koordinatu H identična poslije primjene različitih metoda a posteriori procjene standardnog odstupanja pojedinih grupa mjerenja.

Nakon ispitivanja, na naprijed opisani način, utvrđeno je da maksimalna razlika koja se pojavljuje za koordinatu x kod tačke C nije statistički značajna.

b) Geodetska mreža “Soča97”

Tabea 6-53 Razlike koordinata tačaka između pojedinih metoda –mreža “Soča97”

Koord.	Razlike koordinata tačaka									
	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{H}}$ [mm]	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{F}}$ [mm]	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{E}}$ [mm]	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]	$x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{F}}$ [mm]	$x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{E}}$ [mm]	$x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]	$x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}$ [mm]	$x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]	$x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]
X_{A}	0.12	0.14	0.00	0.12	0.02	-0.12	0.00	-0.14	-0.02	0.12
Y_{A}	0.19	0.22	0.00	0.19	0.03	-0.19	0.00	-0.22	-0.03	0.19
H_{A}	0.24	0.28	0.00	0.24	0.04	-0.24	0.00	-0.28	-0.04	0.24
X_{B}	0.18	0.22	0.00	0.18	0.03	-0.18	0.00	-0.22	-0.03	0.18
Y_{B}	0.21	0.24	0.00	0.21	0.04	-0.21	0.00	-0.25	-0.04	0.21
H_{B}	0.26	0.30	0.00	0.26	0.05	-0.26	0.00	-0.30	-0.05	0.26
X_{C}	0.19	0.22	0.00	0.19	0.03	-0.19	0.00	-0.22	-0.03	0.19
Y_{C}	0.42	0.49	0.00	0.42	0.07	-0.42	0.00	-0.49	-0.07	0.42
H_{C}	0.34	0.40	0.00	0.34	0.06	-0.34	0.00	-0.40	-0.06	0.34
X_{D}	0.19	0.23	0.00	0.19	0.04	-0.19	0.00	-0.23	-0.04	0.19
Y_{D}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H_{D}	0.16	0.19	0.00	0.16	0.03	-0.16	0.00	-0.19	-0.03	0.16

Tabela 6-54 Procjena tačnosti položaja tačaka – mreža “Soča97”

Koord.	Metoda a posteriori procjene standardnog odstupanja *s*				
	MINQUE [mm]	**Helmert** [mm]	**Förstner** [mm]	**Ebner** [mm]	**AUE** [mm]
X_{A}	4.7031	4.7886	4.8072	4.7033	4.7885
Y_{A}	3.3763	3.4438	3.4584	3.3765	3.4437
H_{A}	4.9667	5.0467	5.0643	4.9667	5.0466
X_{B}	4.6212	4.7154	4.7361	4.6214	4.7153
Y_{B}	3.3655	3.4247	3.4377	3.3657	3.4246
H_{B}	4.9752	5.0614	5.0801	4.9752	5.0613
X_{C}	4.6164	4.7003	4.7187	4.6167	4.7001
Y_{C}	3.2465	3.3120	3.3258	3.2466	3.3119
H_{C}	4.9651	5.0509	5.0695	4.9652	5.0508
X_{D}	4.6940	4.7853	4.8057	4.6942	4.7852
Y_{D}	3.1483	3.1989	3.2102	3.1485	3.1988
H_{D}	4.8575	4.9413	4.9595	4.8577	4.9411

U geodetskoj mreži „Soča97“ rezultati a posterirori procjene MINQUE i Ebnerove metode dali su identičane rezultate (Tabea 6-53). Slično, rezultati procjene metodama Helmert i AUE dali su identične vrijednosti a posteriori procjene standardnog odstupanja. Maksimalna razlika između je 0,49 mm za tačku C za *y* koordinatu. Ovaj rezultat je između MINQUE i Förstnerove, te Ebner ove i Förstnerove metode.

Procjena tačnosti položaja (Tabela 6-54) tačke C nakon primjene rezultata dobivenih MINQUE i Ebnerove metode je identičan s_{X_C}=4.6164 mm, s_{Y_C}=3.2465 mm i s_{H_C}=4.9651 mm. Slično, identična procjena tačnosti položaja tačke C postignuta je primjenom rezultata a posteriori procjene dobivenih Helmert ovom, odnosno AUE metodom, i iznose s_{X_C}=4.7003 mm, s_{Y_C}=3.3120 mm i s_{H_C}=5.0509 mm. Nakon primjene rezultata a posteriori procjene postignutih Förstnerovom metodom procjena položaja tačke C je s_{X_C}=4.7187 mm, s_{Y_C}=3.3258mm i s_{H_C}=5.0695mm.

Analiza pokazuje da navedene razlike između konačnih koordinata nepoznatih tačaka koje su nastale zbog primjene različitih metoda procjene, te različitih algoritama nisu statistički značajne.

c) Geodetska mreža “Moste”

Tabela 6-55 Razlike koordinata tačaka između pojedinih metoda –mreža “Moste”

Broj tačke	*Razlike koordinata tačaka*									
	$x_M - x_H$ [mm]	$x_M - x_F$ [mm]	$x_M - x_E$ [mm]	$x_M - x_A$ [mm]	$x_H - x_F$ [mm]	$x_H - x_E$ [mm]	$x_H - x_A$ [mm]	$x_F - x_E$ [mm]	$x_F - x_A$ [mm]	$x_E - x_A$ [mm]
X_S	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	-0.01	0.01	0.01
Y_S	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	-0.01	0.01	0.01
H_S	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_W	-0.02	0.00	-0.02	0.00	0.01	0.00	0.02	-0.01	0.02	0.02
Y_W	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.01	-0.01	-0.01
H_W	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_V	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.01	-0.01	-0.01
Y_V	-0.02	-0.01	-0.02	0.00	0.02	0.00	0.02	-0.02	0.02	0.02
H_{VI}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{VI}	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.01	-0.01	-0.01
Y_{VI}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H_{VI}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{VIII}	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	-0.01	0.01	0.01
Y_{VIII}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

H_{VIII}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{IX}	-0.02	0.00	-0.02	0.00	0.01	0.00	0.02	-0.01	0.02	0.02
Y_{IX}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H_{IX}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_X	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.01	-0.01	-0.01
Y_X	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H_X	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{XI}	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.01	-0.01	-0.01
Y_{XI}	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	-0.01
H_{XII}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{XII}	-0.03	-0.01	-0.03	0.00	0.02	0.00	0.03	-0.02	0.03	0.03
Y_{XII}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H_{XII}	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{P3}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Y_{P3}	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01
H_{P3}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabela 6-56 Procjena tačnosti položaja tačaka – mreža "Moste"

Broj tačke	**Metoda a posteriori procjene**				
	MINQUE [mm]	**Helmert** [mm]	**Förstner** [mm]	**Ebner** [mm]	**AUE** [mm]
s_{X_S}	0.7730	0.7728	0.7730	0.7728	0.7730
s_{Y_S}	0.7674	0.7666	0.7672	0.7666	0.7674
s_{H_S}	0.5580	0.5581	0.5580	0.5581	0.558
s_{X_W}	0.8380	0.8343	0.8371	0.8343	0.8381
s_{Y_W}	0.7363	0.7348	0.7359	0.7348	0.7363
s_{H_W}	0.5809	0.5810	0.5809	0.5810	0.5809
s_{X_V}	0.7662	0.7647	0.7658	0.7647	0.7662
s_{Y_V}	0.7119	0.7095	0.7112	0.7095	0.7119
s_{H_V}	0.5191	0.5191	0.5191	0.5191	0.5192
$s_{X_{VI}}$	0.7686	0.7668	0.7681	0.7668	0.7685
$s_{Y_{VI}}$	0.7181	0.7153	0.7174	0.7153	0.7181
$s_{H_{VI}}$	0.5196	0.5196	0.5196	0.5196	0.5196
$s_{X_{VIII}}$	0.7626	0.7617	0.7624	0.7617	0.7626
$s_{Y_{VIII}}$	0.6985	0.6975	0.6982	0.6975	0.6985
s_{VIII}	0.5122	0.5123	0.5122	0.5123	0.5122

$s_{X_{IX}}$	0.7752	0.7737	0.7748	0.7737	0.7752
$s_{Y_{IX}}$	0.7035	0.7012	0.7029	0.7012	0.7035
$s_{H_{IX}}$	0.5209	0.5209	0.5209	0.5209	0.5209
s_{X_X}	0.7532	0.7529	0.7531	0.7529	0.7532
s_{Y_X}	0.7023	0.7009	0.7019	0.7009	0.7023
s_{H_X}	0.5027	0.5027	0.5027	0.5027	0.5027
$s_{X_{XI}}$	0.7521	0.7519	0.7521	0.7519	0.7521
$s_{Y_{XI}}$	0.6969	0.6959	0.6966	0.6959	0.6969
$s_{H_{XI}}$	0.5024	0.5025	0.5024	0.5025	0.5024
$s_{X_{XII}}$	0.8154	0.8122	0.8145	0.8122	0.8153
s_{XII}	0.7723	0.7655	0.7704	0.7655	0.7723
$s_{H_{XII}}$	0.5828	0.5829	0.5829	0.5829	0.5829
$s_{X_{P3}}$	0.7609	0.7599	0.7607	0.7600	0.7609
$s_{H_{P3}}$	0.6962	0.6952	0.6960	0.6952	0.6962
$s_{H_{P3}}$	0.5063	0.5063	0.5062	0.5063	0.5062

U simuliranoj teoretskoj mreži “Moste” MINQUE i Ebnerova metoda, te Helmertova i AUE metoda daju identičan rezultat a posteriori procjene (Tabela 6-55). Najveća razlika između koordinata tačaka nakon procjene primjenom različitih metoda javila se kod tačke XII za x koordinatu u iznosu od 0.03 mm.

Nakon primjene rezultata a posteriori procjene primjenom MINQUE, odnosno Ebnerove metode, položajna tačnost za tačku XII (Tabela 6-56) je $s_{\mathrm{X_{XII}}}$=0.8145 mm, $s_{\mathrm{Y_{XII}}}$=0.7704 mm, $s_{\mathrm{H_{XII}}}$=0.5829 mm. Nakon primjene rezultata a posteriori procjene standardnog odstupanja dobivenog Helmertovom, odnosno AUE metodom položajna tačnost za tačku XII je $s_{\mathrm{X_{XII}}}$=0.8122 mm, $s_{\mathrm{Y_{XII}}}$=0.7655 mm, $s_{\mathrm{H_{XII}}}$=0.5829 mm.

Primjenom rezultata a posteriori procjene Förstnerovom metodom, položajna tačnost za tačku XII je $s_{\mathrm{X_{XII}}}$=0.8145mm, $s_{\mathrm{Y_{XII}}}$=0.7704 mm, $s_{\mathrm{H_{XII}}}$=0.5829 mm. Treba istaći (Tabela 6-56) za koordinatu *H,* za sve tačke mreže, primjenom rezultata bilo koje od korištenih metoda a posteriori procjene, daju identičnu procjenu za položajna tačnost nadmorske visine s_H.

Nakon ispitivanja je utvrđeno da su razlike između konačnih koordinata nepoznatih tačaka nastale zbog primjene navedenih metoda nisu statistički značajne.

d) Geodetska mreža „Pg_Slovenija“

Tabela 6-57 Razlike koordinata tačaka između pojedinih metoda – mreža “Pg_Slovenija”

Broj tačke	Razlike koordinata tačaka									
	$x_M - x_H$ [mm]	$x_M - x_F$ [mm]	$x_M - x_E$ [mm]	$x_M - x_A$ [mm]	$x_H - x_F$ [mm]	$x_H - x_E$ [mm]	$x_H - x_A$ [mm]	$x_F - x_E$ [mm]	$x_F - x_A$ [mm]	$x_E - x_A$ [mm]
X_{S1}	0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.01	0.01	0.01
Y_{S1}	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.01	-0.01	-0.01
H_{S1}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S2}	0.02	-0.03	0.01	-0.01	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{S2}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.04	0.00	0.01	-0.03	-0.02	-0.01
H_{S2}	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
X_{S3}	0.02	-0.03	0.01	0.00	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{S3}	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.02	-0.01	-0.01	0.01	0.00	0.01
H_{S3}	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
X_{S4}	0.01	-0.02	0.01	0.00	-0.04	0.00	-0.01	0.03	0.02	0.01
Y_{S4}	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00
H_{S4}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S5}	0.02	-0.03	0.01	0.00	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{S5}	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
H_{S5}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S6}	0.03	-0.05	0.02	-0.01	-0.07	-0.01	-0.03	0.06	0.05	0.03
Y_{S6}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.04	0.00	0.01	-0.03	-0.02	-0.01
H_{S6}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S7}	0.01	-0.02	0.01	0.00	-0.03	0.00	-0.01	0.03	0.02	0.01
Y_{S7}	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00
H_{S7}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S8p}	0.03	-0.06	0.02	0.00	-0.09	-0.01	-0.03	0.08	0.06	0.03
Y_{S8p}	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
H_{S8p}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S9p}	0.06	-0.08	0.03	0.00	-0.14	-0.02	-0.06	0.11	0.08	0.06
Y_{S9p}	0.02	-0.04	0.01	0.00	-0.06	-0.01	-0.02	0.05	0.04	0.02
H_{S9p}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{S10p}	-0.02	0.04	-0.01	0.00	0.06	0.01	0.02	-0.06	-0.04	-0.02
Y_{S10p}	0.01	-0.02	0.00	0.00	-0.02	0.00	-0.01	0.02	0.02	0.01
H_{S10p}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

X_{11}	0.01	-0.02	0.01	-0.01	-0.04	-0.01	-0.01	0.03	0.02	0.01
Y_{11}	-0.02	0.03	-0.01	0.00	0.05	0.01	0.02	-0.04	-0.03	-0.02
H_{11}	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
X_{12}	0.02	-0.03	0.01	-0.01	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{12}	-0.02	0.04	-0.01	0.00	0.07	0.01	0.02	-0.06	-0.04	-0.02
H_{12}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{13}	0.02	-0.03	0.01	-0.01	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{13}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
H_{13}	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
X_{14}	0.03	-0.05	0.02	0.00	-0.08	-0.01	-0.03	0.07	0.05	0.03
Y_{14}	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00
H_{14}	-0.01	0.01	0.00	0.01	0.02	0.00	0.01	-0.01	-0.01	-0.01
X_{15}	0.02	-0.04	0.01	0.00	-0.06	-0.01	-0.02	0.05	0.04	0.02
Y_{15}	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.02	-0.01	-0.01
H_{15}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{16}	0.01	-0.01	0.01	0.00	-0.02	0.00	-0.01	0.02	0.01	0.01
Y_{16}	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
H_{16}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{17}	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
Y_{17}	-0.01	0.03	-0.01	0.00	0.04	0.01	0.01	-0.03	-0.03	-0.01
H_{17}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{18}	0.02	-0.02	0.01	0.00	-0.04	-0.01	-0.02	0.03	0.02	0.02
Y_{18}	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
H_{18}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{21}	-0.02	0.02	-0.01	-0.01	0.04	0.01	0.02	-0.03	-0.02	-0.02
Y_{21}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.04	0.00	0.01	-0.03	-0.02	-0.01
H_{21}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.03	0.01	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
X_{22}	0.01	-0.03	0.01	-0.01	-0.04	-0.01	-0.01	0.04	0.03	0.01
Y_{22}	-0.03	0.05	-0.02	0.00	0.08	0.01	0.03	-0.07	-0.05	-0.03
H_{22}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{23}	0.00	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
Y_{23}	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.03	0.00	0.01	-0.03	-0.02	-0.01
H_{23}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.03	0.01	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
X_{24}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Y_{24}	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00
H_{24}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{25}	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
Y_{25}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.03	0.00	0.01	-0.03	-0.02	-0.01

H_{25}	-0.01	0.01	-0.01	0.00	0.03	0.01	0.01	-0.02	-0.01	-0.01
X_{26}	0.01	-0.02	0.01	0.00	-0.03	0.00	-0.01	0.03	0.02	0.01
Y_{26}	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.03	0.00	0.01	-0.02	-0.02	-0.01
H_{26}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{27}	0.02	-0.03	0.01	0.00	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{27}	-0.01	0.03	-0.01	0.00	0.04	0.01	0.01	-0.04	-0.03	-0.01
H_{27}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{28}	0.02	-0.03	0.01	0.00	-0.05	-0.01	-0.02	0.04	0.03	0.02
Y_{28}	-0.01	0.02	-0.01	0.00	0.03	0.00	0.01	-0.03	-0.02	-0.01
H_{28}	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabela 6-58 Procjena tačnosti položaja tačaka – mreža "Pg_Slovenija"

Broj tačke	**Metoda a posteriori procjene**				
	MINQUE [mm]	**Helmert** [mm]	**Förstner** [mm]	**Ebner** [mm]	**AUE** [mm]
$s_{X_{S1}}$	0.0920	0.0832	0.0876	0.0920	0.1055
$s_{Y_{S1}}$	0.0846	0.0769	0.0807	0.0846	0.0979
$s_{H_{S1}}$	0.0432	0.0433	0.0434	0.0432	0.0431
$s_{X_{S2}}$	0.1133	0.1092	0.1117	0.1133	0.1197
$s_{Y_{S2}}$	0.1149	0.1069	0.1111	0.1149	0.128
$s_{H_{S2}}$	0.0464	0.0466	0.0466	0.0464	0.0461
$s_{X_{S3}}$	0.1179	0.1127	0.1157	0.1179	0.1267
$s_{Y_{S3}}$	0.1376	0.1310	0.1347	0.1376	0.1487
$s_{H_{S3}}$	0.0529	0.0531	0.0532	0.0529	0.0527
$s_{X_{S4}}$	0.1331	0.1249	0.1292	0.1331	0.1479
$s_{Y_{S4}}$	0.1384	0.1324	0.1358	0.1384	0.1493
$s_{H_{S4}}$	0.0551	0.0553	0.0554	0.0551	0.0548
$s_{X_{S5}}$	0.1567	0.1441	0.1504	0.1567	0.1796
$s_{Y_{S5}}$	0.1236	0.1172	0.1207	0.1236	0.1355
$s_{H_{S5}}$	0.056	0.0563	0.0563	0.056	0.0558
$s_{X_{S6}}$	0.1440	0.1304	0.1371	0.1440	0.1688
$s_{Y_{S6}}$	0.1214	0.1157	0.1189	0.1214	0.1311
$s_{H_{S6}}$	0.0648	0.0652	0.0652	0.0648	0.0644
$s_{X_{S7}}$	0.1059	0.0939	0.0997	0.1059	0.1273
$s_{Y_{S7}}$	0.1280	0.1221	0.1254	0.128	0.1379
$s_{H_{S7}}$	0.0684	0.0688	0.0688	0.0684	0.0680

$s_{X_{S8p}}$	0.1505	0.1397	0.1453	0.1505	0.1678
$s_{Y_{S8p}}$	0.1225	0.1100	0.1162	0.1225	0.1436
$s_{H_{S8p}}$	0.0982	0.0987	0.0987	0.0982	0.0975
$s_{X_{S9p}}$	0.2758	0.2685	0.2734	0.2758	0.2879
$s_{Y_{S9p}}$	0.2514	0.2377	0.2454	0.2514	0.2711
$s_{H_{S9p}}$	0.1512	0.1519	0.1519	0.1512	0.1503
$s_{X_{S10p}}$	0.0848	0.074	0.0791	0.0848	0.1047
$s_{Y_{S10p}}$	0.1756	0.1719	0.1746	0.1756	0.1818
$s_{H_{S10p}}$	0.0614	0.0617	0.0617	0.0614	0.0611
$s_{X_{11}}$	0.2032	0.1893	0.1967	0.2032	0.2238
$s_{Y_{11}}$	0.1379	0.1279	0.1331	0.1379	0.1543
$s_{H_{11}}$	0.0648	0.0649	0.0651	0.0648	0.0649
$s_{X_{12}}$	0.1182	0.113	0.116	0.1182	0.1272
$s_{Y_{12}}$	0.1559	0.1472	0.1521	0.1559	0.1691
$s_{H_{12}}$	0.0586	0.0589	0.059	0.0586	0.0583
$s_{X_{13}}$	0.1184	0.1131	0.1161	0.1184	0.1275
$s_{Y_{13}}$	0.1847	0.1760	0.1810	0.1847	0.1973
$s_{H_{13}}$	0.0645	0.0646	0.0648	0.0645	0.0643
$s_{X_{14}}$	0.1543	0.1429	0.1487	0.1543	0.1748
$s_{Y_{14}}$	0.1399	0.1338	0.1373	0.1399	0.1509
$s_{H_{14}}$	0.0680	0.0668	0.0675	0.0680	0.0706
$s_{X_{15}}$	0.1773	0.1631	0.1703	0.1773	0.2023
$s_{Y_{15}}$	0.1277	0.1212	0.1248	0.1277	0.1400
$s_{H_{15}}$	0.0637	0.0634	0.0637	0.0637	0.0644
$s_{X_{16}}$	0.2763	0.2638	0.2706	0.2763	0.3035
$s_{Y_{16}}$	0.2526	0.2421	0.2480	0.2526	0.2765
$s_{H_{16}}$	0.1601	0.1611	0.1611	0.1601	0.1590
$s_{X_{17}}$	0.1842	0.1677	0.1760	0.1842	0.2114
$s_{Y_{17}}$	0.1524	0.1391	0.1457	0.1524	0.1771
$s_{H_{17}}$	0.1012	0.1018	0.1018	0.1012	0.1005
$s_{X_{18}}$	0.1750	0.1613	0.1684	0.175	0.1969
$s_{Y_{18}}$	0.1565	0.1458	0.1513	0.1565	0.1757
$s_{H_{18}}$	0.1004	0.1010	0.1010	0.1004	0.0998
$s_{H_{18}}$	0.1004	0.1010	0.1010	0.1004	0.0998
$s_{X_{21}}$	0.1694	0.1639	0.1674	0.1694	0.1771

$s_{Y_{21}}$	0.1376	0.1273	0.1327	0.1376	0.1546
$s_{H_{21}}$	0.0871	0.0859	0.0867	0.0871	0.0886
$s_{X_{22}}$	0.1367	0.1289	0.1331	0.1367	0.1506
$s_{Y_{22}}$	0.1567	0.1482	0.1529	0.1567	0.1701
$s_{H_{22}}$	0.0735	0.0737	0.0738	0.0735	0.0733
$s_{X_{23}}$	0.1319	0.1251	0.1288	0.1319	0.1432
$s_{Y_{23}}$	0.1475	0.1396	0.1440	0.1475	0.1606
$s_{H_{23}}$	0.0790	0.0781	0.0788	0.079	0.0805
$s_{X_{24}}$	0.1559	0.1441	0.1501	0.1559	0.1771
$s_{Y_{24}}$	0.1402	0.1341	0.1376	0.1402	0.1513
$s_{H_{24}}$	0.0891	0.0895	0.0896	0.0891	0.0885
$s_{X_{25}}$	0.1742	0.1612	0.1678	0.1742	0.1972
$s_{Y_{25}}$	0.1283	0.1217	0.1253	0.1283	0.1407
$s_{H_{25}}$	0.0832	0.0821	0.0829	0.0832	0.0847
$s_{X_{26}}$	0.2185	0.2035	0.2115	0.2185	0.2427
$s_{Y_{26}}$	0.1518	0.1392	0.1455	0.1518	0.1760
$s_{H_{26}}$	0.1077	0.1081	0.1082	0.1077	0.1073
$s_{X_{27}}$	0.1862	0.1701	0.1783	0.1862	0.2125
$s_{Y_{27}}$	0.1540	0.1405	0.1471	0.1540	0.1790
$s_{H_{27}}$	0.1055	0.1059	0.1060	0.1055	0.1051
$s_{X_{28}}$	0.1829	0.1683	0.1758	0.1829	0.2067
$s_{Y_{28}}$	0.1595	0.1491	0.1545	0.1595	0.1783
$s_{H_{28}}$	0.1057	0.1061	0.1062	0.1057	0.1053

Aposteriori procjena standardnog odstupanja, odnosno težina pojedinih grupa mjerenja u geodetskoj mreži „Pg_Slovenija", koju čine stvarna geodetska mjerenja, MINQUE i AUE metoda, te Helmertova i Ebner ova metoda dale su identičan rezultat, respektivno.

U ovoj geodetskoj mreži (Tabela 6-57) pojavila su se odstupanja između koordinata u maksimalnom iznosu od 0,04 mm do 0,06 mm. Bilo je zanimljivo ispitati da li imaju statistički značaj s obzirom na postignutu položajnu tačnost koordinata tačaka nakon izravnanja primjenom rezultata a posteriori procjene različitih metoda. Iz rezultata (Tabela 6-58) o položajnoj tačnosti koordinata tačaka u geodetskoj mreži „Pg_Slovenija, uočeno je da tačka s_1 ima sljedeću položajnu tačnost:

1. po metodama MINQUE i Ebner, tačnost za koordinate x, y i H iznose $s_{X_{s1}}$=0.0920 mm, $s_{Y_{s1}}$=0.0846 mm, $s_{H_{s1}}$=0.0432mm, respektivno.
2. Helmertova metoda daje tačnost za x,y i H$s_{X_{s1}}$=0.0832 mm, $s_{Y_{s1}}$=0.0769 mm, $s_{H_{s1}}$=0.0433 mm, respektivno.
3. Förstnerova metoda rezultira tačnostima$s_{X_{s1}}$=0.0876 mm, $s_{Y_{s1}}$=0.0807 mm, $s_{H_{s1}}$=0.0434 mm, respektivno te,
4. AUE metoda daje tačnost koordinata$s_{X_{s1}}$=0.1055 mm, $s_{Y_{s1}}$=0.0979 mm, $s_{H_{s1}}$=0.0431 mm.

Zanimljivo je također, predstaviti položajnu tačnost tačke s_{16}, nakon primjene različitih metoda:

1. MINQUE i Ebner – ova metoda daje tačnost $s_{X_{s16}}$=0.2763 mm, $s_{Y_{s16}}$=0.2526 mm, $s_{H_{s16}}$=0.1601mm,
2. Helmert – ova metoda rezultira tačnošću$s_{X_{s16}}$=0.2638 mm, $s_{Y_{s16}}$=0.2421 mm, $s_{H_{s16}}$=0.1611 mm,
3. Förstner – ovom metodom dobije se tačnost $s_{X_{s16}}$=0.2706 mm, $s_{Y_{s16}}$=0.2480 mm, $s_{H_{s16}}$=0.1611 mm,
4. AUE metoda daje $s_{X_{s16}}$=0.3035 mm, $s_{Y_{s16}}$=0.2765 mm, $s_{H_{s16}}$=0.1590 mm.

Nakon detaljne analize uticaja primjene različitih metoda a posteriori procjene standardnog odstupanja pojedinih grupa mjerenja na konačne koordinate traženih parametara utvrđeno je da postoji statistički značajna razlika između metoda:

1. Helmert ove i Förstner ove metode za *x* koordinatu tačaka s2, 13 i 14,
2. Förstnerove i Ebner ove metode za *x* koordinatu tačaka s6 i 14, kao i *y* koordinatu tačke 22, te konačno
3. MINQUE i Förstner ove metode za *x* koordinatu tačke s10.

e) Geodetska mreža „GFSA“

Tabela 6-59 Razlike koordinata tačaka između pojedinih metoda –mreža “GFSA”

Koord.	Razlike koordinatnih popravaka									
	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{H}}$ [mm]	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{F}}$ [mm]	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{E}}$ [mm]	$x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]	$x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{F}}$ [mm]	$x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{E}}$ [mm]	$x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]	$x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}$ [mm]	$x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]	$x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{A}}$ [mm]
X_{10}	0.57	-0.05	0.57	-0.07	-0.62	0.00	-0.62	-0.03	-0.03	-0.65
Y_{10}	-0.11	0.00	-0.11	0.01	0.12	0.00	0.12	0.01	0.01	0.13
H_{10}	0.02	-0.10	0.02	0.02	-0.13	0.00	-0.13	0.12	0.12	0.00
X_{20}	-0.31	0.04	-0.31	0.06	0.34	0.00	0.34	0.02	0.02	0.37
Y_{20}	-0.23	0.01	-0.23	0.03	0.24	0.00	0.24	0.02	0.02	0.26
H_{20}	0.02	-0.14	0.02	0.03	-0.15	0.00	-0.15	0.17	0.17	0.01
X_{30}	-0.76	0.08	-0.76	0.11	0.84	0.00	0.84	0.03	0.03	0.87
Y_{30}	0.83	-0.07	0.83	-0.11	-0.91	0.00	-0.91	-0.03	-0.03	-0.94
H_{30}	0.02	-0.10	0.02	0.02	-0.13	0.00	-0.13	0.12	0.12	0.00
X_{40}	-0.18	0.02	-0.18	0.04	0.19	0.00	0.19	0.02	0.02	0.22
Y_{40}	-0.16	0.01	-0.16	0.01	0.16	0.00	0.16	0.00	0.00	0.17
H_{40}	0.07	-0.41	0.07	0.08	-0.48	0.00	-0.48	0.49	0.49	0.01
X_{50}	0.59	-0.06	0.59	-0.09	-0.64	0.00	-0.64	-0.04	-0.04	-0.68
Y_{50}	-0.57	0.04	-0.57	0.08	0.61	0.00	0.61	0.04	0.04	0.65
H_{50}	0.10	-0.50	0.10	0.11	-0.59	0.00	-0.59	0.60	0.60	0.01
X_{60}	0.59	-0.06	0.59	-0.09	-0.65	0.00	-0.65	-0.03	-0.03	-0.68
Y_{60}	1.27	-0.09	1.27	-0.17	-1.36	0.00	-1.36	-0.08	-0.08	-1.43
H_{60}	-0.01	0.11	-0.01	-0.02	0.12	0.00	0.12	-0.13	-0.13	-0.02
X_{70}	0.54	-0.05	0.54	-0.07	-0.59	0.00	-0.59	-0.02	-0.02	-0.61
Y_{70}	-0.26	0.03	-0.26	0.03	0.29	0.00	0.29	0.00	0.00	0.29
H_{70}	-0.01	-0.02	-0.01	0.01	-0.02	0.00	-0.02	0.03	0.03	0.01
X_{80}	-0.26	-0.01	-0.26	-0.01	0.25	0.00	0.25	0.00	0.00	0.25
Y_{80}	0.05	0.01	0.05	0.00	-0.04	0.00	-0.04	0.00	0.00	-0.04
H_{80}	0.01	-0.03	0.01	0.01	-0.04	0.00	-0.04	0.04	0.04	0.00
X_{90}	-0.68	0.05	-0.68	0.10	0.74	0.00	0.74	0.05	0.05	0.78
Y_{90}	-0.70	0.06	-0.70	0.11	0.76	0.00	0.76	0.04	0.04	0.80
H_{90}	-0.09	0.41	-0.09	-0.10	0.51	0.00	0.51	-0.51	-0.51	0.00
$\mathrm{X}_{101\mathrm{v}}$	-0.11	0.02	-0.11	0.02	0.13	0.00	0.13	0.00	0.00	0.13
$\mathrm{Y}_{101\mathrm{v}}$	-0.11	0.00	-0.11	0.01	0.11	0.00	0.11	0.00	0.00	0.12
$\mathrm{H}_{101\mathrm{v}}$	0.01	-0.09	0.01	0.02	-0.10	0.00	-0.10	0.11	0.11	0.01

Tabela 6-60 Procjena tačnosti položaja tačaka – mreža "GFSA"

Koord.	Metoda a posteriori procjene standardnog odstupanja *s*				
	MINQUE [mm]	**Helmert** [mm]	**Förstner** [mm]	**Ebner** [mm]	**AUE** [mm]
X_{10}	1.1502	1.2653	1.2755	1.1502	1.2818
Y_{10}	0.7362	0.9077	0.9252	0.7362	0.9359
H_{10}	1.7824	1.7361	1.5076	1.7824	1.7830
X_{20}	1.7438	1.9935	2.0152	1.7438	2.0290
Y_{20}	2.1934	2.1980	2.2030	2.1932	2.2054
H_{20}	2.8606	2.8050	2.5108	2.8604	2.8615
X_{30}	1.5900	1.6691	1.6769	1.5900	1.6814
Y_{30}	1.7936	2.0047	2.0239	1.7936	2.0354
H_{30}	2.9938	2.9069	2.4862	2.9938	2.9942
X_{40}	2.3734	2.3531	2.3539	2.3732	2.3541
Y_{40}	1.1803	1.2853	1.2977	1.1803	1.3050
H_{40}	2.5579	2.5062	2.2363	2.5579	2.5589
X_{50}	1.4714	1.6959	1.7164	1.4711	1.7292
Y_{50}	1.9977	2.1382	2.1506	1.9977	2.1578
H_{50}	3.1111	3.0389	2.6711	3.1109	3.1118
X_{60}	1.3700	1.7076	1.7395	1.3700	1.7590
Y_{60}	2.0298	2.1154	2.1258	2.0295	2.1317
H_{60}	1.9411	1.8884	1.6267	1.9411	1.9414
X_{70}	1.0817	1.2021	1.2128	1.0817	1.2198
Y_{70}	1.0330	1.2231	1.2410	1.0330	1.2526
H_{70}	1.6909	1.6432	1.4096	1.6909	1.6912
X_{80}	1.8423	1.9522	1.9647	1.8420	1.9718
Y_{80}	1.3233	1.5385	1.5608	1.3229	1.5742
H_{80}	1.7335	1.6846	1.4464	1.7335	1.7338
X_{90}	1.5508	1.7228	1.7410	1.5508	1.7521
Y_{90}	1.7621	1.8582	1.8687	1.7621	1.8751
H_{90}	2.8068	2.7278	2.3405	2.8068	2.8071
$X_{101\mathrm{v}}$	1.0844	1.1480	1.1550	1.0840	1.1597
$Y_{101\mathrm{v}}$	0.6782	0.8000	0.8130	0.6782	0.8210
$H_{101\mathrm{v}}$	1.9649	1.9194	1.6914	1.9647	1.9655

U geodetskoj mreži „GFSA“ svaka od gore navedenih metoda a posteriori procjene dala je različiti rezultat a posteriori procjene standardnog odstupanja grupa mjerenja.

Nakon provedonog testiranja (Tabela 6-59) utvrđeno je da postoji statistički značajna razlika između MINQUE i Helmertove metode, MINQUE i Ebnerove metode te Ebner ove i AUE metode za *x* koordinatu tače 10, zatim za *x* i *y* koordinate tačke 30, potom za *x* i *y* koordinate tačke 60, te za *x* koordinate tačaka 70 i 90.

Za tačku 30 razlika za *x* koordinatu je 0,76 mm, a za *y* koordinatu 0,83 mm. Položajna tačnost tačke 30 u zavisnosti (Tabela 6-60) od primijenjene metode je:

1) za MINQUE i Ebnerovu metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,5900 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=1,7936 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=2.9938 mm,
2) za Helmertovu metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,6691 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,0047 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=2.9069 mm, Förstner – ovu metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,6769 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,0239 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=2,4862 mm, te
3) AUE metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,6814 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,0354 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=2.9942 mm.

Slično, za tačku 60 razlika za *x* koordinatu je 0,59 mmm, a za *y* koordinatu 1,27 mm. Položajna tačnost tačke 30 u zavisnosti od primijenjenog stohastičkog modela je:

1) za MINQUE i Ebner – ovu metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,3700 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,0298 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=1,9411 mm,
2) za Helmert – ovu metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,7076 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,1154 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=1,8884 mm, Förstner – ovu metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,7395 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,0295 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=1,9411 mm, te
3) AUE metodu $s_{\mathrm{X}_{30}}$=1,7590 mm, $s_{\mathrm{Y}_{30}}$=2,1317 mm i $s_{\mathrm{H}_{30}}$=1.9414 mm.

Analizom rezultata u navedenih pet geodetskih mreže nameće se zaključak da se u simuliranim geodetskim mrežama ne javljaju statistički značajne razlike, dok se razlika javlja u mrežama sa stvarnim geodetskim mjerenjima.

Kod simuliranih mreža dobiveni su skoro pa identični rezultati a posteriori procjene, što je najvjerovatnije posljedica simulacije i toga što su sve grupe mjerenja homogene (imaju isti broj mjerenja). Odstupanja konačnih rezultata javila su se kod mreža sa stvarnim geodetskim mjerenjima, gdje grupe mjerenja nisu homogene.

Ovdje treba naglasiti da je kao ulazni podatak geodetske mreže „GFSA“ uvedena grupa mjerenja d_{GNSS} koja je izvedena neovisno od ostalih mjerenja, tj. metodama satelitske geodezije. Grupa mjerenja dužina d_{GNSS} u stvarnosti nisu direktna mjerenja, nego su izvedena iz GNSS opažanja.

Zanimljivo je da u simuliranim mrežama nema statistički značajnih odstupanja, dok u realnim geodetskim mrežama postoje statistički značajne razlike. Moguće je da u mrežama sa realnim stvarnim mjerenjima, zbog broja mjerenja kao i mogućnosti postojanja ostatka grešaka (sistematskih i grubih), mjerenja nemaju strogo normalnu distribuciju, koja je osnova za aposteriori modele procjene težina.

Između grupa mjerenja najvjerovatnije postoji određeni stupanj korelacije, koji je prilikom računanja zanemaren.

Literatura

Amiri - Simkooei, A. (2007). *Least - squares variance component estimation: theory and GPS applications.* Delft: Netherland Geodetic Commission.

Amiri-Simkooei, A. R., Asce, M., Zangeneh-Nejad, F., & Asgari, J. (2013). Least-Squares Variance Component Estimation Applied to GPS Geometry-Based Observation Model. *Journal of Surveying Engineering* , 176-187.

Amiri-Simkooei, A. R., Tiberius, C. C., & Teunissen, P. J. (2007). Assessement of noise in GPS coordinate time series: metodhology and results. *Journal of Geophysical Research, submitted* .

Bähr, H., Altamimi, Z., & Heck, B. (2007). *Variance Componente Estimation for Combination of Terrestrial Reference Frame.* Karlsruhe, Germany: University Karlsruhe.

Benčić, D., & Solarić, N. (2008). *Mjerni instrumenti i sustavi u geodeziji i geoinformatici.* Zagreb: Školska knjiga.

BIMP, & JCGM, 1. (2008). *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement.*

Božić, B. (2007). *Račun izravnanja 1 - Analiza rezultata geodetskih mjerenja, skripta.* Beograd: Građevinski fakultet Beograd.

Caspary, W. (1987). *Concepts of network and deformation analysis.* Sydney: The University of New South Wales, School of Geomatic Engineering, Monograph 11.

Crocetto, N., Gatti, M., & and Russo, P. (2000). Simplified formulae for the BIQUE estimation of variance components in disjunctive observations groups. *Journal of Geodesy* , 447-457.

Ebner, H. (1972). A posteriori Variancschätcungen für die Koordinaten unabhängiger Modelle. *Zfv Nr.4* , 166-172.

Eshagh, M. (2010). Error calibration of quasi-geoidal, normal and ellipsoidal heights of Sweden using variance component estimation. *Contributions to Geophysics and Geodesy, Vol. 40* , 1-30.

Eshagh, M. (2005). On BQUE and BQUNE of variance - covariance components. *Proceedings of Geomatics 84 Conference & Exhibition at NCC of Iran.* Teheran.

Förstner, W. (1979). Ein Verfaren zur Schatzung von Varianz und Kovarianzkomponenten. *AVN,11-12* , 446-453.

Fotopoulos, G. (2003). *An analysis on the optimal combination of geoid orthometric and ellipsoidal height data, Ph. D.Thesis.* Calgary, Alberta: University of Calgary, Department of Geomatics Engineering.

Fotopoulos, G. (2003). *An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric and ellipsoidal height data. PhD thesis,University of Calgary.* Calgary, Aberta: Department of Geomatics Engineering.

Fotopoulos, G. (2005). Calibration of geoid error models via a combined adjustment of ellipsoidal, orthometric and gravimeetric height data. *Journal of Geodesy, 79* , 111-123.

Fotopoulos, G., & Sideris, M. G. (2003). On the estimation of variance components using GPS, geoid and levelling data. *Canadian Geophysical Union Annual meeting: Challenges and opportunities for geophysics in Canada*, (str. 10-14). Banff, Canada.

Ghilani, C. D., & Wolf, P. R. (2006). *Adjustment Computations Spatial Data Analysis.* Published by John Wiley & Sons, : New Jersey.

Goldsmith, M. (2010). *A Beginner's Guide to Measurements.* Teddington, Middlesex, United Kingdom: National Physical Laboratory.

Gopaul, N. S., Wang, J. G., & Guo, J. (2010). On Posteriori Variance and Covariance Components Estimation. *CPGPS 2010 Technical Forum, August 17 – 20, 2010.* Shanghai: CPGPS 2010 Index to Scientific & Technical Proceedings.

Grafarend, E. (1985). Variance-covariance component estimation: Theoretical results and geodetic aplications. *Stat.Decis.,Supplemental Issue 2* , 407-441.

Grafarend, E. W. (1980). An introduction of variance-covariance estimation of Helmert type. *Zfv,4* , 161-180.

Grafarend, E. W. (1984). Variance-covariance component estimation of Helmeert type in Gauss-Helmert model. *ZFV, 109* , 34-44.

Grodecki, J. (1999). Generalized maximum-likelihood estimation of variance components with inverted gamma prior. *Journal of Geodesy,73* , 367-374.

Grodecki, J. (2001). Generalized maximum-likelihood estimation of variance-covariance components with non-informative. *Journal of Geodesy,75* , 157-163.

Helmert, F. (1907). Die ausgleichungsrechnung nach der methode der kleinsten quadrate. *2. Auflage, Verlag von BG Teubner* .

Helmert, F. (1924). Die ausgleichungsrechnung nach der methode der kleisten quadrate. 3.AUFL.

Horn, S., Horn, R., & Dunkan, D. (1975). Estimating heteroscedastic variances in linear. *Journal of the American Statistical Association, 70* , 380-385.

Hsu, R. (1999). An alternative expression for the variance factors in using iterated almost. *Journal of Geodesy, 73* , 173-179.

Hsu, R. (2001). Helmert method as equivalent of iterated almost unbiased estimation. *Journal of Surveying Engineering , 127(3)* , 79-89.

Kiamehr, R., & Eshagh, M. (2008). Estimating variance components of ellipsoidal, orthometric and geoidal. *Journal of the Earth & Space Physics. Vol. 34* , 1-13.

Kizilsu, G., & Sahin, M. (2000). SLR precision analysis for LAGEOS I and II. *Earth Planets Space* , 789–794.

Koch, K. (1987). Bayesian inference for variance components. *Manuscripta Geodaetica, Vol.12* , 309-313.

Koch, K. (1986). Maximum likelihood estimate of vriance components. Ideas by A.J.Pope. *Bull. Geod., 60* , 329-338.

Koch, K. R. (1988). Bayesian statistics for variance components with informative and noninformative priors. *Manuscripta Geodaetica, Vol. 13* , 370-373.

Koch, K. R. (2004). *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, 4th edition.* Bonn: Ehemals Ferd. D?ummlers Verlag.

Koch, K. (1978). Schatzung von Variankomponenten. *AVN, 85* , 264-269.

Koch, K., & Kusche, J. (2002). Regularization of geopotential determination from satellite. *Journal of Geodesy, 76* , 259–268.

Kogoj, D. (1992). *Izbira najprimerjenše metode aposteriori ocene uteži merjenih količin geodetskih mrež. Doktorska disertacija.* Ljubljana, Slovenia: Univerza v Ljubljani.

Kogoj, D. (2006). *Mjerenje dužina elektronskim daljinomjerom.* Sarajevo: Univerzitet u Sarajevu Građevinski fakultet.

Kubik, K. (1967). Schätzung der Gewichte der Fehlergleichungen beim Ausgleichungsproblem nach vermittlenden Beobachtungen. *Zfv* , 173-178.

Kubik, K. (1970). The estimation of the weights of measured quantities within the method of least squares. *Bull. Geod., 95* , 21-40.

Kuche, J. (2003). A Monte-Carlo technique for weight estimation. *Journal of Geodesy* , 641–652.

Lother, G., & Strehle, J. (2007). *Ausgleichungsrechnung Methode der kleinsten Quadrate .* München: Hochschule München Fakultät für Geoinformation .

Lucas, J. R., & Dillinger, W. H. (1998). MINQUE for block diagonal bordered systems such as those encountered in VLBI data analysis. *Journal of Geodesy, 72* , 343-349.

Lucas, J., & Dillinger, W. (1998). MINQUE for block diagonal bordered systems such as those encountered in VLBI data analysis. *Journal of Geodesy, 72* , 343-349.

Mihajlović, K. (1974). *Geodezija II - I deo.* Beograd: Grafičko preduzeće Prosveta.

Mihajlović, K. (1978). *Geodezija II - II deo.* Beograd: Naučna knjiga.

Mihajlović, K., & Aleksić, I. (2008). *Koncepti mreža u geodetskom premeru.* Beograd: Privredno društvo za kartografiju Geokarta d.o.o.

Moghtased, J. G., Tehranchi, R., & Amiri-Simkooei, A. (2014). An alternative method for non-negative estimation of variance. *Journal of Geodesy,* , Berlin Heidelberg.

Ou, Z. (1991). Approximative Bayes estimation of variance components. *Manuscr. Geod. 16* , 168-172.

Ou, Z. (1989). Estimation of variance and covariance components. *Bull. Geod., 63* , 139-148.

Ou, Z., & Koch, K. (1994). Analytical expressions for Bayes estimates of variance components. *Manuscripta Geodaetica,19* , 168-172.

Perović, G. (2005). *Metoda najmanjih kvadrata.* Beograd: Građevinski fakultet u Beogradu.

Rao, C. (1971). Estimation of Variance Components - MINQUE Theory. *Journal of Multivariate Statistics, Vol.1* , 257-275.

Rao, C. R. (1970). Estimation of Heterogenous Variance in Linears Models. *Journal of American Statistical Associations* , 161-172.

Rao, C. R. (1971). Estimation of Variance and Covariance Components - MINQUE. *Journal of Multivariate Analysis* , 257-275.

Satirapod, C., Wang, J., & Rizos, C. (2002). A simplified MINQUE procedure for the estimation of variance-covariance componennts of GPS observables. *Survey Review,36* , 582-590.

Sjöberg, L. E. (1983). Unbiased estimation of varijance-covariance components in condition adjustment with unknown - a MINQUE approach. *Zeitschrift für Vermessungwesen* , 382-387.

Sjöberg, L. (1984). Non-negative Variance Component Estimation in the Gauss-Helmert Adjustment Model. *Manuscripta Geodaetica, Vol. 9* , 247-280.

Sjöberg, L. (2011). On the Best Quadratic Minimum Bias Non-Negative Estimator of a Two-Variance Component Model. *Journal of Geodetic Science* , 280-285.

Sjöberg, L. (1995). The best quadratic minimum bias non-negative definite estimator for an an additive two variance component model. *Manuscr. Geod., 20* , 139-144.

Teunissen, P. (1988). *Towards a least - squares framework for adjusting and testing of both functional and stochastic model.* Delft: Internal research memo, Geodetic Computing Centre.

Tiberius, C. C., & Kenselaar, F. (2000). Variance component estimation for precise GPS positioning. *Geodesy and Cartography, XXVI* , 152-159.

Tiberius, C., & Kenselaar, F. (2003). Variance component estimation and precise GPS positioning: case study. *Journal of Surveying Engineering, Vol. 129* , 11-18.

van Cranenbroeck, J., & Brown, N. (15. 5 2016). *Networking Motorized Total Stations and GPS Receivers for Deformation Measurements.* Preuzeto od https://www.fig.net/:
https://www.fig.net/resources/.../ts16/TS16_5_Doukas_et_al.pdf

van Loon, J. (2008). *Functional and stochastic modelling of satellite gravity data, PhD Thesys.* Delft, Netherlands: NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Netherlands Geodetic Commission.

Vodopivec, D., & Kogoj, D. (1997). Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit der a posteriori Schatzung der Gewichte. *VGI – Osterreichische Zeitschrift fur Vermessung und Geoinformatio 85 (3)* , 202-207.

Wang, J.-G., Gopaul, N., & Scherzinger, B. (2009). Simplified Algorithms of Variance Component Estimation for Static and Kinematic GPS Single Point Positioning. *Journal of Global Positioning Systems, Vol. 8* , 43-52.

Williams, S. D., Bock, Y., Fang, P., Jamason, P., Nikolaidis, R. M., Prawirodirdjo, L., i dr. (2004). Error analysis of continuous GPS position time series. *Journal of Geophysical Research, 109* .

Yavuz, E., & Baykal, O. (2006). Criterion for comparing the variance component estimation methods used for adjusting horizontal control networks. *Geodesy and Cartography* , 6-13.

Yin, S., Wang, J., & Park, P. (2005). An improvement of GPS height estimations: stochastic modeling. *Earth Planets Space, 57* , 253–259.

Yu, Z. (1992). A generalization theory of estimation of variance-covariance components. *Manuscripta Geodaetica, 70* , 295-301.

Yu, Z. (1996). A universal formula of maximul likelihood estimation of variance-covariance components. *Journal of Geodesy, 70* , 233-240.

Zhang, J., Bock, Y., Johnson, H., Fang, P., Williams, S., Genrich, J., i dr. (1997). Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates and site velocitties. *Journal of Geophysical Research, 102* 18035-18055.

Popis slika

Popis tabela

Index pojmova

N

O

P

S

T

U

V

Z

CONTENT